EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Metodická příručka a ukázkové příklady z matematiky

PRO OBORY KATEGORIE DOSAŽENÉHO VZDĚLÁNÍ E SOŠ

1. část

Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek, Josef Bobek,
Zuzana Bobková, František Procházka,
Miroslav Staněk

MOV

ISBN 978-80-7578-026-3

Materiál vznikl v rámci projektu Modernizace odborného vzdělávání (MOV), který byl spolufinancován z Evropských strukturálních a investičních fondů a jehož realizaci zajišťoval Národní pedagogický institut České republiky.

Praha, duben 2020

Obsah

1 Úvod

Vážení přátelé,

dostává se Vám do rukou metodická příručka, která se pokouší na ukázkových příkladech ukázat, jak řešit příklady z matematiky se žáky učebních oborů kategorie E. Je součástí materiálů, které vznikly v projektu Modernizace odborného vzdělávání k podpoře výuky matematiky na středních odborných školách. Současně s příručkou je k dispozici i sbírka vhodných příkladů k procvičování.

Při tvorbě modulů pro obory vzdělávání E v rámci projektu **Modernizace odborného vzdělávání (MOV)** jsme zjistili, že na těchto oborech se významně změnilo složení žákovských skupin. Vzdělávají se zde ve větší míře žáci s lehkým mentálním postižením, žáci se speciálními vzdělávacími potřebami, žáci, kteří nesplnili podmínky pro přijetí na obory vzdělávání H, a žáci, kteří neuspěli v některém z oborů H a přestoupili do oboru E. Ke změnám RVP pro obory E nedošlo, na změny ve složení žákovských skupin i na aktuální požadavky na vzdělávání však učitelé musí reagovat, upravit své didaktické postupy a posunout akcenty na stěžejní témata a jejich zaměření na aplikace matematiky. Je obtížné dostát všem požadavkům na vzdělávání ve skupinách žáků s tak rozdílnými předpoklady, kdy jen zčásti mohou učitelé využít jejich předchozí zkušenosti.

Dnešní SOŠ často zahrnují vzdělávání nejen v oborech různého zaměření, ale i různých kategorií vzdělání: E, H, M, L, mnohdy i K. Učitelé musí i v přípravě na stejná či podobná témata významně odlišit didaktické přístupy dle oborů vzdělání i kategorií vzdělání a na ně se během přestávek mezi hodinami přeorientovat. Zvláště obtížné je uzpůsobit výuku v oborech E.

Proto jsme se rozhodli, že na pomoc učitelům, kteří v oborech E vyučují, připravíme metodickou příručku a sbírku úloh, které by jim měly ulehčit jejich práci. Část 1 obsahuje metodiku výuky doplněnou poznámkami a ukázkami postupů a řešení typových úloh. Část 2 obsahuje příklady vhodné k procvičování probíraného učiva. Výběr témat a k nim přiřazených úloh odpovídá znění platných RVP pro obory E, je však podřízen našemu názoru na úlohu matematického vzdělávání v oborech E a zkušenostem z výuky v těchto oborech.

Autoři metodiky si jsou vědomi, že problematika znevýhodněných žáků na oborech E je složitá a komplexní metodika platná pro všechny typy znevýhodnění žáků není možná, proto se zaměřili na základní matematické kompetence žáků oborů E, které potřebují pro běžný život a obor vzdělání. Komplexnost problematiky vidíme a obecný metodický návod lze nalézt na: http://katalogpo.upol.cz/katalog-v-pdf/.

K výuce žáků oboru E je vhodné využít i názorné učební pomůcky, které jsou dostupné na trhu, např. známková hra pro celá a desetinná čísla, zlomkovnice, dekanomický čtverec, binomická a trinomická krychle apod.

Případně lze využít i práce pro ZŠ:
http://www.nuv.cz/uploads/Publikace/vup/matematickagramotnost_final.pdf
https://www.vospspgs.cz/files/user/global/import/article592/Prirucka_manip_cinnosti.pdf

Za autorský kolektiv:
Miroslav Bartošek, Josef Bobek, Zuzana Bobková, František Procházka, Miroslav Staněk

2 Poznámky k metodice matematického vzdělávání v oborech E

Jak již bylo zmíněno v úvodu, v oborech E se vzdělávají žáci s lehkým mentálním postižením, žáci se speciálními vzdělávacími potřebami, žáci, kteří nesplnili kritéria pro přijetí na obory vzdělávání H, a žáci, kteří neuspěli v některém z oborů H a přestoupili do oboru E. Řada z nich má nízkou úroveň motivace, nelze od nich očekávat zájem o vzdělávání a řádnou domácí přípravu. Motivaci je třeba pěstovat postupně, osobním přístupem k žákům, hledáním a nalezením optimálního postupu řešení úloh, zaměřením se na uplatnitelnost matematiky v řešení běžných problémů i ve výkonu povolání žáka, na kritické posuzování řešení z matematického a zejména praktického pohledu. Pro naplnění těchto požadavků je třeba vytvořit na základě platných RVP v ŠVP potřebné podmínky. K tomu směřoval i projekt MOV, jehož výsledky v podobě vytvořených modulů, ať již v ucelené řadě, nebo v inspiraci jednotlivými moduly, mohou vyučující využít. Informace naleznete na stránkách www.projektmov.cz.

Při výuce matematiky pro obory E je především třeba:

- volit pokud možno individuální přístup, vhodně motivovat každého žáka a přistupovat k němu s ohledem na jeho schopnosti a dovednosti;
- rozšiřovat obzory žáků a vhodným zatěžováním mozku rozvíjet i jejich mentální schopnosti, čemuž musí být uzpůsoben výběr i využití matematických metod;
- rozvíjet krátkodobou a dlouhodobou paměť;
- řádně procvičit a upevnit základní matematické algoritmy a dovednosti jejich dostatečným opakováním a nácvikem, což je u těchto žáků nezbytné;
- postupovat striktně od konkrétního k abstraktnímu a zároveň mít na paměti, že úroveň abstrakce je u těchto žáků hodně rozdílná;
- postupovat od jednoduššího ke složitějšímu s ohledem na fakt, že úroveň složitosti osvojených kompetencí je silně individuální;
- začínat manipulativními činnostmi (pokud to jde) a motivačními příklady z praxe žáků, které jsou jim tematicky blízké a souvisejí s oborem jejich vzdělání;
- cílit k řešení problémů z praxe a oboru vzdělání;
- využívat vysvětlení na modelech a praktických ukázkách;
- využívat efektivně kalkulátory a vhodný matematický software při řešení problémů;

- podporovat spolupráci mezi žáky, pokud tomu nebrání žákův zdravotní stav;
- využívat všechny vhodné metody, včetně metod primárně určených žákům základních škol a žákům znevýhodněným, a spolupracovat s odborníky z psychologie a rodinou žáka.

Jsme si vědomi, že ne všichni žáci zvládnou všechny uvedené očekávané výsledky učení a jim odpovídající uvedené úlohy. Náročnější očekávané výsledky učení jsme označili kurzívou. Záleží pouze na pedagogovi, které z těchto příkladů bude se svými žáky řešit. Není tedy cílem, aby všichni žáci vyřešili všechny předložené úlohy. Jde především o to, aby žáci získali v matematice sebedůvěru a uměli své matematické kompetence odpovídající jejich schopnostem dobře uplatnit v odborném vzdělávání a praxi.

3 Aritmetika

Aritmetika je základem matematického vzdělávání pro každodenní život a uplatnění v oboru vzdělání. V oborech E zahrnuje porovnávání a početní operace s přirozenými, celými, racionálními a zaokrouhlenými hodnotami reálných čísel i s nimi související témata jako procenta, poměr, úměra, měřítko a převody jednotek.

V oborech E si žáci osvojují postupy a vztahy dle možnosti ve třech úrovních:

- rutinní dovednosti, např. určit vztah mezi čísly nebo provést početní operaci s čísly naučeným způsobem;
- využití významu, např. umět propojit určení relace nebo operace s reálnou situací;
- využití algoritmu, např. zdůvodnit, proč se určení relace nebo operace provádí daným postupem.

Rutinní dovednosti mají žáci nacvičeny a zvládají zpaměti, písemným postupem, pomocí grafického náčrtu nebo efektivním využitím kalkulátoru a vhodného počítačového softwaru. Žáci oboru E v závislosti na svých schopnostech často nezvládnou všechny dovednosti či algoritmy pochopit v souvislostech a ani by to nebylo nutné, proto některé dovednosti a algoritmy musí nacvičit tak, aby se staly rutinními a byli je schopni v praxi v případě potřeby využívat. Je třeba se snažit, pokud to jde, o co největší podíl porozumění oproti rutině. Protože žáci oboru E vyžadují jednoduchý a konkrétní přístup, je nutné základní postupy objasnit nejprve s využitím přirozených a celých čísel na konkrétních příkladech z praxe a teprve pak přistoupit k práci s racionálními čísly.

Využití významu je klíčovým faktorem při motivaci a praktickém užití matematiky v oborech E. Vyžaduje porozumění pojmu číslo (včetně zlomků) a operacím s ním, a také objasňuje jejich aplikaci na problémy praxe a oboru vzdělání. K rozvoji významového porozumění je vhodné učit žáky získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Je vhodné řešit úlohy z praxe a oboru vzdělání s využitím výpočtu hodnot získaných dosazením do běžně používaných vzorců, poměru, úměr, procent i mocnin a odmocnin.

Využití algoritmu je obecně základním cílem matematického vzdělávání. Je však nejvíce závislé na intelektových předpokladech žáka a úroveň jeho zvládnutí bude tedy v oborech E nejvíce diferencovaná. Je třeba nastavit úroveň nároků na žáka v této oblasti tak, aby byly motivující a rozvíjely intelektové schopnosti žáka, ale nebyly přemrštěné a nezpůsobovaly demotivaci žáka.

3.1 Očekávané výsledky učení

Při řešení úloh z jejich běžného života nebo oboru vzdělání žáci:

- porozumí textu jednoduché úlohy a vyřeší ji známými postupy;
- kontrolují výsledek z hlediska početního postupu i věcného významu výsledku;
- zformulují odpověď k získanému výsledku;
- *vytvoří jednoduchou slovní úlohu dle vzoru*.

Přitom:

1. Porovnávají čísla (a údaje ve stejných jednotkách).

2. Provádějí početní operace v oboru přirozených a celých čísel, při výpočtech účelně užívají tabulky, kalkulátor nebo jiné vhodné prostředky digitálních technologií:
   - dle možnosti a účelu buď zpaměti nebo s využitím kalkulátoru, případně tabulek, sčítají a odčítají čísla do 100, násobí a dělí v oboru malé násobilky, užívají mocninu a odmocninu malých přirozených čísel;
   - dodržují pravidla pro pořadí početních operací;
   - efektivně využívají pravidla/vlastnosti početních operací (komutativní, asociativní, distributivní);
   - na příkladech objasní význam záporných čísel v běžném životě;
   - vyznačí na číselné ose celé číslo a číslo k němu opačné.

3. Provádějí početní operace a řeší úlohy v oboru racionálních čísel, při výpočtech užívají tabulky, kalkulátor a jiné vhodné prostředky digitálních technologií:
   - na konkrétních příkladech vysvětlí a znázorní vztah mezi celkem a jeho částí vyjádřenou zlomkem;
   - vyjádří celek z jeho poloviny, čtvrtiny, třetiny, pětiny, desetiny;
   - porovnávají zlomky se stejným jmenovatelem;
   - přečtou, zapíšou a znázorní desetinné číslo na číselné ose;
   - porovnávají desetinná čísla;

– násobí a dělí čísla násobky deseti (posouvají desetinnou čárku);
– přečtou a zapíšou číslo s užitím číselných řádů desítkové soustavy;
– zaokrouhlují čísla s danou přesností;
– provádějí jednoduché operace (sčítání, odčítání, násobení a dělení) se zlomky a s desetinnými čísly;
– odhadují rozměry a měří objekty ze žákova okolí a z oboru vzdělávání;
– využívají poměr v reálných situacích;
– stanoví poměr ze zadaných údajů;
– využívají měřítko mapy nebo plánu k výpočtu;
– *k výpočtům používají trojčlenku*;
– určí počet procent, procentovou část a základ, k výpočtu mohou využít *řešení na základě vzorce,* přes jedno procento, *trojčlenku* či využitím zlomku či desetinného čísla;
– *využívají ve výpočtech druhou a třetí mocninu a zaokrouhlené hodnoty druhé a třetí odmocniny určené na kalkulátoru*;
– vypočítají hodnotu získanou dosazením do běžně používaných vzorců;
– provádějí číselný odhad výsledku.

3.2 Ukázkové úlohy

3.2.1 Přirozená a celá čísla

Úlohy odpovídající náročnějším očekávaným výsledkům učení: 2, 3, 8, 9

1. Sečtěte daná čísla a porovnejte výsledky:
   a) 2 + 15 + 18 =
   b) 10 + 5 + 20 =

   Řešení s metodickým komentářem:
   Žák může počítat písemně nebo zpaměti s využitím asociativního zákona:
   a) 2 + 18 + 15 = 20 + 15 = 35
   b) 10 + 20 + 5 = 30 + 5 = 35

2. Doplňte čísla tak, aby se součty obou příkladů rovnaly:

   a) 4 + __ + 26 = __

   b) 12 + __ + __ = 54

   Řešení s metodickým komentářem:

   Žáci musí zvolit správný sled výpočtů. Vezmou si z úlohy b) pravou stranu a doplní potřebné sčítance. Protože u úlohy b) je více možných postupů, je vhodné nechat žáky najít svá řešení a potom je společně porovnat.

   $54 - (4 + 26) = 54 - 30 = 24 \quad \Rightarrow \quad 4 + 24 + 26 = 54$

   $54 - (12 + 24) = 54 - 36 = 18 \quad \Rightarrow \quad 12 + 18 + 24 = 54$

3. Doplňte čísla tak, aby všechny příklady měly stejný výsledek:

   a) 25 + __ = 42

   b) 74 – __ = 42

   c) 6 . __ = 42

   d) 84 : __ = 42

   Řešení s metodickým komentářem:

   a) $42 - 25 = 17 \quad \Rightarrow \quad 25 + 17 = 42$

   b) $74 - 42 = 32 \quad \Rightarrow \quad 74 - 32 = 42$

   c) $42 : 6 = 7 \quad \Rightarrow \quad 6 \,.\, 7 = 42$

   d) $84 : 42 = 2 \quad \Rightarrow \quad 84 : 2 = 42$

4. Jsou dána čísla 6, 5, 3, 7, 9.

   a) Seřaďte daná čísla podle velikosti a určete největší a nejmenší z těchto čísel.

   b) Sečtěte nejmenší a největší číslo.

   c) Vytvořte rozdíl největšího a nejmenšího čísla.

   d) Určete součin největšího a nejmenšího čísla.

   e) Vydělte největší z těchto čísel nejmenším.

   Řešení s metodickým komentářem:

   Pro porozumění je vhodné ukázat na obrázcích vztahy mezi jednotlivými čísly:

   a) Čísla tvoří řadu 3, 5, 6, 7, 9. Největší číslo je 9 a nejmenší číslo je 3.

   b) Součet 9 + 3 = 12

   c) Rozdíl 9 – 3 = 6

d) Součin 9 . 3 = 27

e) Podíl 9 : 3 = 3

5. Petr má v peněžence 100 Kč. Koupil za 7 Kč mrkev, za 6 Kč housky, za 12 Kč koláč a za 8 Kč jogurt. Potřebuje si ještě koupit za 75 Kč sešity. Určete, kolik Kč Petr utratil a zda si může ještě koupit sešity.

Řešení s metodickým komentářem:

Nejprve žáci sečtou, kolik Kč Petr utratil za nákup: $7 + 6 + 12 + 8 = (12 + 8) + 7 + 6 = 33$.

Potom zjistí, kolik Kč má Petr k dispozici na nákup sešitů: $100 – 33 = 67$. $(67 < 75)$

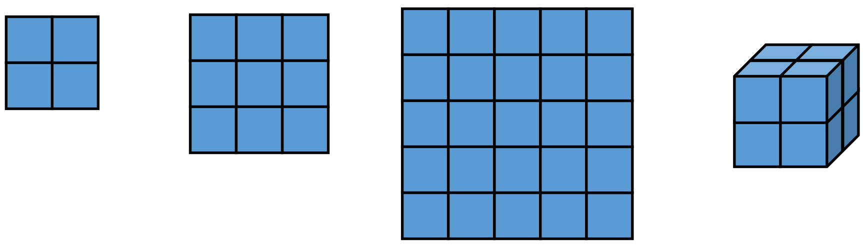
Nakonec určí, kolik Kč Petrovi chybí na nákup sešitů: $75 – 67 = 8$.

Odpověď: Petr utratil 33 Kč, a proto mu na nákup sešitů chybí 8 Kč.

6. Vypočítejte 2^2, 3^2, 5^2, 2^3.

Řešení s metodickým komentářem:

Důležité je objasnit žákům, co znamená zápis s mocninou, a na konkrétním případě ho procvičit. Vhodné je používat reálné objekty či obrázky. Jedná se o propedeutiku obsahů a objemů, včetně převodů plošných a objemových jednotek. Je třeba základní matematické koncepty opakovat při každé příležitosti a tím je upevňovat.



Obrázek 1. Přirozená a celá čísla – příklad 6 – řešení

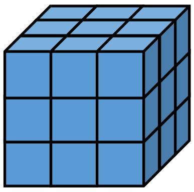
Z obrázku je patrné, že $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $2^3 = 8$.

7. V regálu jsou 3 krabice ve třech řadách za sebou a ve třech vrstvách nad sebou. Kolik je v regálu krabic?

Řešení s metodickým komentářem:

$3 . 3 . 3 = 27$

Vedeme žáky k tomu, aby si sestrojili podobné schéma, jako je na obrázku:



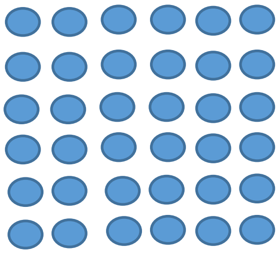
Obrázek 2. **Přirozená a celá čísla – příklad 7 – řešení**

8. Na čtvercovém záhonu máme vysázet pravidelně do stejného počtu řad a sloupců 36 macešek. Kolik řad a sloupců budeme mít?

   Řešení s metodickým komentářem:

   Pokud žáci odmocninu neznají, je vhodné začít mocninou a hledat vhodné číslo. Hledáme číslo, které po vynásobení samo sebou, tedy umocněním na druhou, dá číslo 36, hledáme tedy druhou odmocninu z 36.

   $36 = 6^2$



Obrázek 3. **Přirozená a celá čísla – příklad 8 – řešení**

9. Odečtěte čísla:

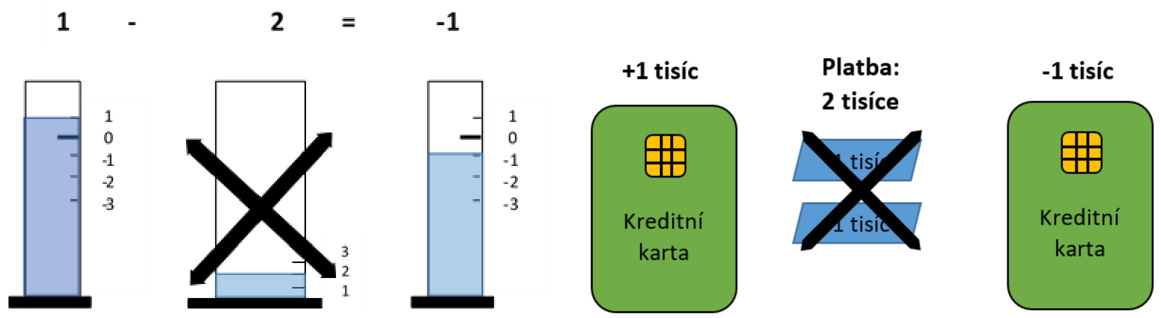
   a) $1 - 2 =$

   b) $-1 - (-3) =$

   Řešení s metodickým komentářem:

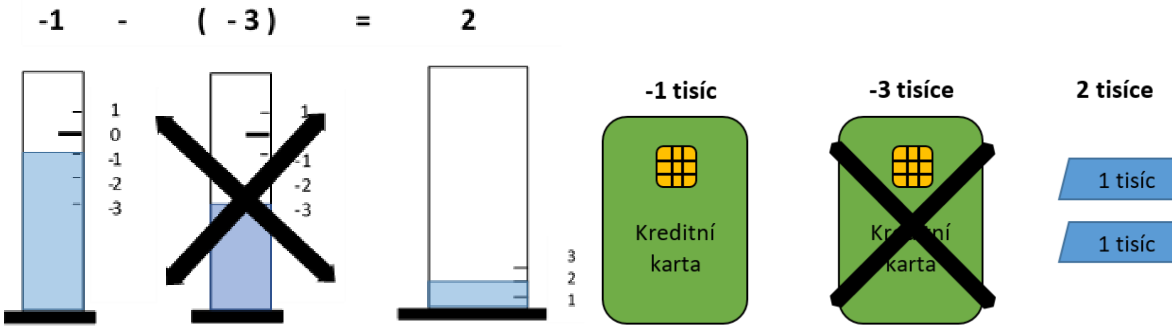
   Pro objasnění záporných čísel je možno užít model odměrného válce nebo model půjčování peněz.

a)



Obrázek 4. **Přirozená a celá čísla – příklad 9a – řešení**

b)

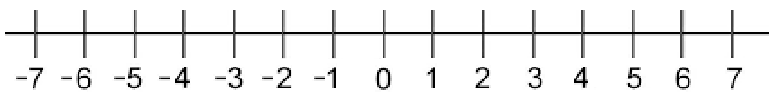


Obrázek 5. **Přirozená a celá čísla – příklad 9b – řešení**

10. Jsou dána čísla 2, 4, 7. Určete k daným číslům čísla opačná a vyznačte je na číselné ose.

Řešení s metodickým komentářem:

Opačná čísla k daným číslům se liší nejen znaménkem, ale hlavně významem. Proto k číslu 2 je opačné číslo –2, k číslu 4 je opačné číslo –4, k číslu 7 je opačné číslo –7, k číslu –6 je opačné číslo 6.



Obrázek 6. **Přirozená a celá čísla – příklad 10 – řešení**

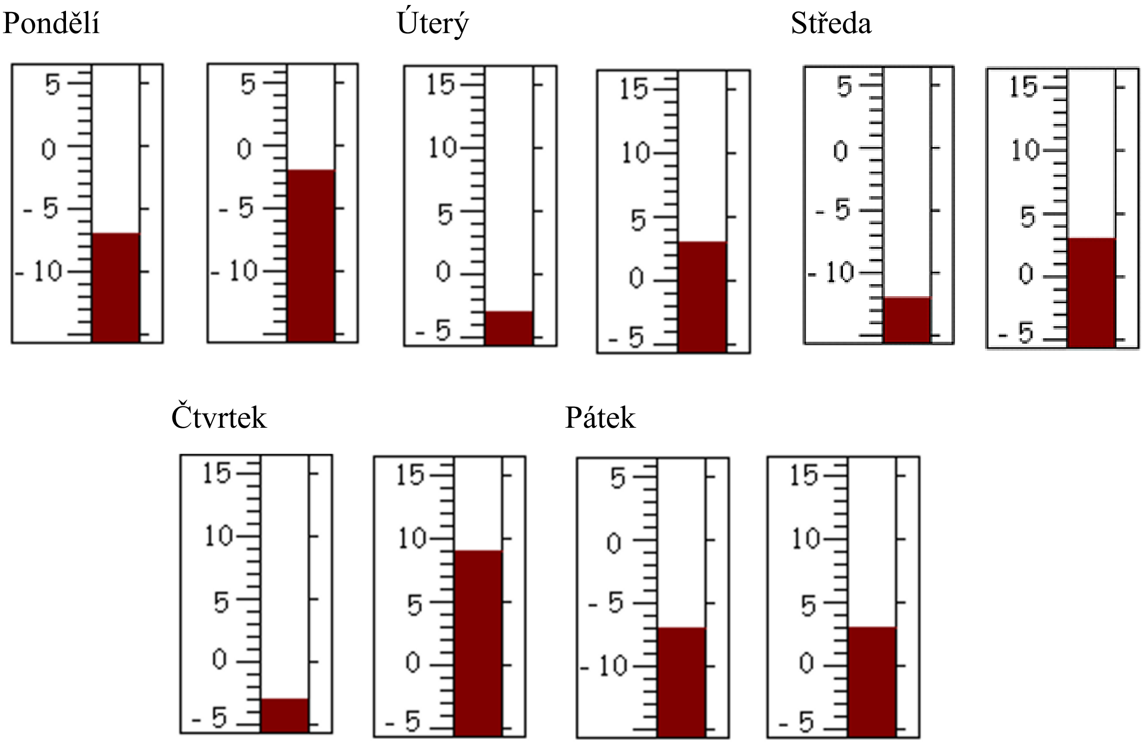
11. Žáci během jednoho zimního týdne zapisovali teplotu, kterou naměřili vždy v 7 hodin a ve 12 hodin. Obrázky znázorňují, co na teploměrech viděli. Určete:

a) teploty, které byly naměřeny v jednotlivých dnech

b) nejmenší teplotu naměřenou ráno

c) největší teplotu naměřenou v poledne

d) rozdíl mezi nejmenší a největší naměřenou teplotou v jednotlivých dnech



Obrázek 7. Přirozená a celá čísla – příklad 11 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

a) Žáci odečtou z jednotlivých teploměrů teploty.

pondělí:	v 7 h naměřeno –7 °C,	ve 12 h naměřeno +2 °C
úterý:	v 7 h naměřeno –3 °C,	ve 12 h naměřeno +3 °C
středa:	v 7 h naměřeno –12 °C,	ve 12 h naměřeno +3 °C
čtvrtek:	v 7 h naměřeno –3 °C,	ve 12 h naměřeno +9 °C
pátek:	v 7 h naměřeno –7 °C,	ve 12 h naměřeno +3 °C

b) Ze zápisu žáci zjistí, že nejmenší naměřená teplota byla naměřena ve středu v 7 h ráno: –12 °C.

c) Největší naměřená teplota byla naměřena ve čtvrtek ve 12 h: +9 °C.

d) Rozdíl mezi naměřenými hodnotami budou žáci určovat pomocí vzdálenosti těchto hodnot od 0:

pondělí: 7 + 2 = 9 °C

úterý: 3 + 3 = 6 °C

středa: 12 + 3 = 15 °C

čtvrtek: 3 + 9 = 12 °C

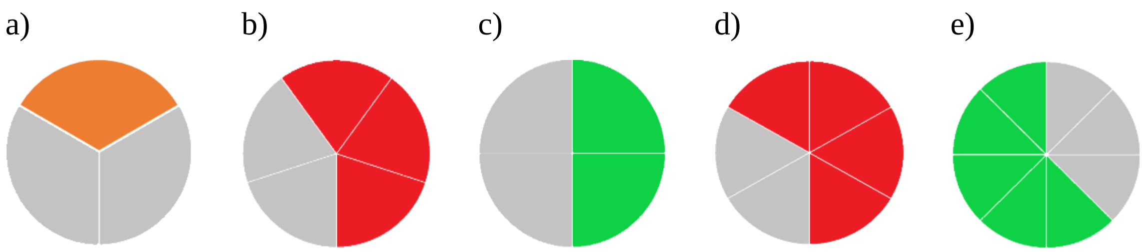
pátek: 7 + 3 = 10 °C

Z daného přehledu je vidět, že největší rozdíl mezi teplotou naměřenou v 7 hodin a mezi teplotou naměřenou ve 12 hodin byl ve středu, a to 15 °C.

3.2.2 Racionální čísla, poměr, úměra, měřítko, procenta

Úlohy odpovídající náročnějším očekávaným výsledkům učení: 6, 18, 19, 20

1. Vyjádřete zlomkem, jaká část obrazce je vybarvena:



Obrázek 8. Racionální čísla, poměr, úměra, měřítko, procenta – příklad 1 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Je třeba, aby si žáci uvědomili, kolik částí má daný kruh a kolik částí je barevných.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{8}$

2. Určete celek, víte-li, že:

a) $\frac{1}{2}$ je 5 b) $\frac{1}{4}$ jsou 3 c) $\frac{1}{3}$ je 6 d) $\frac{1}{5}$ jsou 4 e) $\frac{1}{10}$ jsou 2

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si musí uvědomit, že celek je vždy násobek čísla, které je ve jmenovateli daného zlomku. Proto platí:

a) 2 . 5 = 10 b) 4 . 3 = 12 c) 3 . 6 = 18 d) 5 . 4 = 20 e) 10 . 2 = 20

3. Určete:

a) $\frac{2}{3}$ z 12 b) $\frac{3}{4}$ z 16 c) $\frac{2}{5}$ z 15 d) $\frac{5}{6}$ z 30

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci nejprve dané číslo vydělí číslem ve jmenovateli a potom výsledné číslo vynásobí číslem v čitateli.

a) $\frac{12}{3} \cdot 2 = \frac{24}{3} = 8$

b) $\frac{16}{4} \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$

c) $\frac{15}{5} \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$

d) $\frac{30}{6} \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$

4. Sčítejte a odečítejte:

a)

$\frac{1}{3}\,\text{m} + \frac{2}{3}\,\text{m} = \_\_\_\_\ \text{m}$

$\frac{3}{10}\,\text{kg} + \frac{5}{10}\,\text{kg} = \_\_\_\_\ \text{kg}$

$\frac{2}{5}\,\text{l} + \frac{3}{5}\,\text{l} = \_\_\_\_\ \text{l}$

b)

$\frac{7}{8}\,\text{cm} - \frac{3}{8}\,\text{cm} = \_\_\_\_\ \text{cm}$

$\frac{9}{10}\,\text{kg} - \frac{5}{10}\,\text{kg} = \_\_\_\_\ \text{kg}$

$\frac{5}{6}\,\text{cm}^3 - \frac{1}{6}\,\text{cm}^3 = \_\_\_\_\ \text{cm}^3$

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si na jednotkách, které znají, procvičí sčítání a odčítání zlomků se stejným jmenovatelem. Musí si uvědomit, že nejprve musí zkontrolovat, zda jsou jmenovatelé stejní, a když ano, sčítají nebo odčítají pouze čitatele, jmenovatel musí zůstat stejný.

a)

$\frac{1}{3}\,\text{m} + \frac{2}{3}\,\text{m} = \frac{3}{3}\,\text{m} = 1\,\text{m}$

$\frac{3}{10}\,\text{kg} + \frac{5}{10}\,\text{kg} = \frac{8}{10}\,\text{kg}$

$\frac{2}{5}\,\text{l} + \frac{3}{5}\,\text{l} = \frac{5}{5}\,\text{l} = 1\,\text{l}$

b)

$\frac{7}{8}\,\text{cm} - \frac{3}{8}\,\text{cm} = \frac{4}{8}\,\text{cm} = \frac{1}{2}\,\text{cm}$

$\frac{9}{10}\,\text{kg} - \frac{5}{10}\,\text{kg} = \frac{4}{10}\,\text{kg} = \frac{2}{5}\,\text{kg}$

$\frac{5}{6}\,\text{cm}^3 - \frac{1}{6}\,\text{cm}^3 = \frac{4}{6}\,\text{cm}^3 = \frac{2}{3}\,\text{cm}^3$

5. Chlapci Adam, David, Jan a Petr si v dílnách uřízli 4 laťky na ohraničení svých záhonů. Adam si uřízl laťky dlouhé 0,8 m, David 1,1 m, Jan 0,9 m a Petr 1,2 m.
   a) Kdo z chlapců měl nejdelší laťky?
   b) Kdo měl nejkratší laťky?
   c) Jaký kus latě potřeboval Adam na své čtyři laťky?

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci správně přečtou desetinná čísla a srovnají je podle velikosti: 0,8; 0,9; 1,1; 1,2.

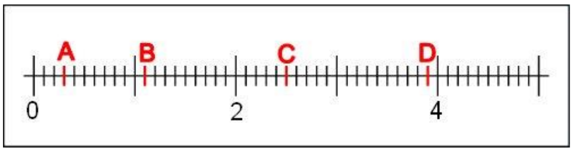
a) Nejdelší laťky měl Petr.

b) Nejkratší laťky měl Adam.

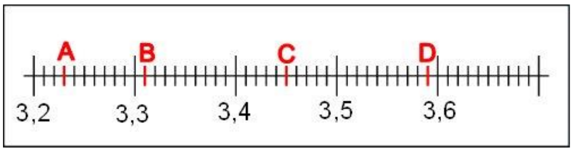
c) Délku laťky lze spočítat dvěma způsoby: buď sčítáním 0,8 + 0,8 + 0,8 + 0,8 = 3,2 m; nebo násobením 4 . 0,8 = 3,2 m. Adam potřeboval laťku dlouhou 3,2 m.

6. Na každé z číselných os jsou zakreslena desetinná čísla A, B, C, D. Určete jejich hodnotu.

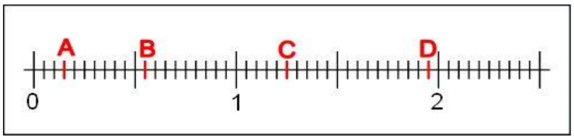
a)



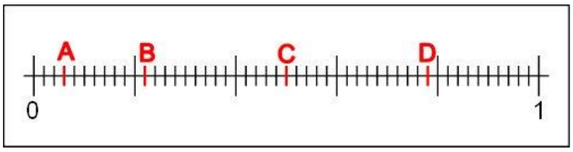
c)



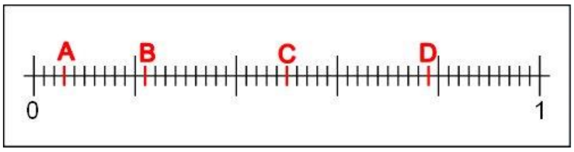
b)



d)



e)



Obrázek 9. Racionální čísla, poměr, úměra, měřítko, procenta – příklad 6 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si musí všimnout, jak je dělena číselná osa, a teprve potom určí hodnoty jednotlivých čísel.

a) A = $\frac{10}{20} . 3 = 1{,}5$; B = 5,5; C = 12,5; D = 19,5

b) A = 0,3; B = 1,1; C = 2,5; D = 3,9

c) A = 0,15; B = 0,55; C = 1,25; D = 1,95

d) A = 3,23; B = 3,31; C = 3,45; D = 3,59

e) A = 0,06; B = 0,22; C = 0,5; D = 0,78

7. Desetinné zlomky vyjádřete desetinným číslem:

$\frac{3}{10}$; $\frac{42}{10}$; $\frac{100}{10}$; $\frac{7}{100}$; $\frac{55}{100}$; $\frac{201}{100}$; $\frac{9}{1\,000}$; $\frac{65}{1\,000}$; $\frac{107}{1\,000}$

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si musí uvědomit, že zlomky, které mají ve jmenovateli 10, 100 nebo 1 000, mohou vyjádřit jako desetinné číslo (desetinná čárka se posouvá vždy o jednu číslici doleva). Měli by si také osvojit a zapamatovat, jak desetinná čísla číst.

$\frac{3}{10} = 0{,}3$ $\frac{42}{10} = 4{,}2$ $\frac{100}{10} = 10$

$\frac{7}{100} = 0{,}07$ $\frac{55}{100} = 0{,}55$ $\frac{201}{100} = 2{,}01$

$\frac{9}{1\,000} = 0{,}009$ $\frac{65}{1\,000} = 0{,}065$ $\frac{107}{1\,000} = 0{,}107$

8. Vypočítejte (bez kalkulátoru):

a) 1,3 + 0,6; 4,56 + 3,29; 5,485 + 2,654

b) 8,4 – 3,6; 9,28 – 5,12; 9,654 – 4,285

Řešení s metodickým komentářem:

Při sčítání a odčítání je nutné, aby žáci zapisovali desetinná čísla pod sebe tak, aby byly jednotky pod jednotkami, desetiny pod desetinami, setiny pod setinami a tisíciny pod tisícinami.

a)			b)		
1,3	4,56	5,485	8,4	9,28	9,654
0,6	3,29	2,654	– 3,6	– 5,12	– 4,285
1,9	7,85	8,139	4,8	4,16	5,369

9. Vynásobte desetinná čísla:

21,3 . 10   2,56 . 100   4,235 . 1 000

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí pochopit, že při násobení desetinného čísla deseti, stem nebo tisícem se číslo opíše a desetinná čárka se posune o jedno, dvě nebo tři místa doprava.

21,3 . 10 = 213   2,56 . 100 = 256   4,235 . 1 000 = 4 235

10. Vydělte desetinná čísla:

45,4 : 10   156,2 : 100   657 : 1 000

Řešení s metodickým komentářem:

Při dělení desetinných čísel deseti, stem a tisícem se postupuje tak, že se číslo opíše a desetinná čárka se posune o počet nul, tedy o jedno, dvě nebo tři místa, doleva.

45,4 : 10 = 4,54   156,2 : 100 = 1,562   657 : 1 000 = 0,657

11. Zaokrouhlete daná čísla na jednotky, desetiny, setiny a tisíciny: 4,5862; 23,1867; 41,8461; 2, 3999.

Řešení s metodickým komentářem:

Při zaokrouhlování si žáci musí vzpomenout, že čísla menší než pět se zaokrouhlují dolů a čísla větší než pět se zaokrouhlují nahoru.

Zaokrouhlení na jednotky: 4,5862 ≈ 5; 23,1867 ≈ 23; 41,8461 ≈ 42; 2,3999 ≈ 2

Zaokrouhlení na desetiny: 4,5862 ≈ 4,6; 23,1867 ≈ 23,2; 41,8461 ≈ 41,8; 2,3999 ≈ 2,4

Zaokrouhlení na setiny: 4,5862 ≈ 4,59; 23,1867 ≈ 23,19; 41,8461 ≈ 41,85; 2,3999 ≈ 2,40

Zaokrouhlení na tisíciny: 4,5862 ≈ 4,586; 23,1867 ≈ 23,187; 41,8461 ≈ 41,846; 2,3999 ≈ 2,400

12. Truhlář nakoupil hřebíky za 189,50 Kč, skoby za 26,70 Kč a smirkový papír za 51,60 Kč. Odhadněte, kolik Kč zaplatil.

Řešení s metodickým komentářem:

Při odhadu žáci nejprve daná čísla zaokrouhlí na jednotky a potom sečtou. O správnosti odhadu se přesvědčí výpočtem.

Truhlář zaplatil přibližně 269 Kč.

Odhad:	$189{,}50 \approx 190$	Výpočet:	189,50
	$26{,}70 \approx 27$		26,70
	$\underline{51{,}60 \approx 52}$		$\underline{51{,}60}$
	269		267,80

13. Změňte číslo 7 v poměru 3 : 2.

Řešení s metodickým komentářem:

Zvětšit (zmenšit) číslo v daném poměru znamená, že ho musíme vynásobit zlomkem v daném poměru. V tomto případě je 3 > 2, jedná se tedy o zvětšení.

$$7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

14. Na mapě v měřítku 1 : 50 000 je vzdálenost letišť v místech A a B 15 cm. Kolik to je km ve skutečnosti?

Řešení s metodickým komentářem:

Měřítko mapy 1 : 50 000 udává, že 1 cm na mapě je ve skutečnosti 50 000 cm, což je 500 m. 15 cm na mapě je 15 . 500 m = 7 500 m = 7,5 km.

15. Obchod zlevnil všechno zboží o 20 %. Kolik Kč bude stát svetr, který před slevou stál 540 Kč?

Řešení s metodickým komentářem:

<u>1. řešení:</u>

pomocí vzorce $p = \frac{č}{z} \cdot 100$, kde p je počet procent, $č$ je procentová část a z je základ

výpočet nové ceny: p = 80 %, z = 540 Kč $\Rightarrow$ $č = \frac{p \cdot z}{100} = \frac{80 \cdot 540}{100} = 432$

výpočet slevy: p = 20 %, z = 540 Kč $\Rightarrow$ $č = \frac{p \cdot z}{100} = \frac{20 \cdot 540}{100} = 108$

<u>2. řešení:</u>

přes 1 %

1 % z 540 je 5,40 $\Rightarrow$ výpočet nové ceny: 80 % je 80 . 5,4 = 432

výpočet slevy: 20 % je 20 . 5,4 = 108

3. řešení:

trojčlenkou

výpočet nové ceny:

100 % ………. 540 Kč

80 % ………. x Kč

$$x = \frac{540\ \text{Kč}\ .\ 80\ \%}{100\ \%} = 432\ \text{Kč}$$

výpočet slevy:

100 % ………. 540 Kč

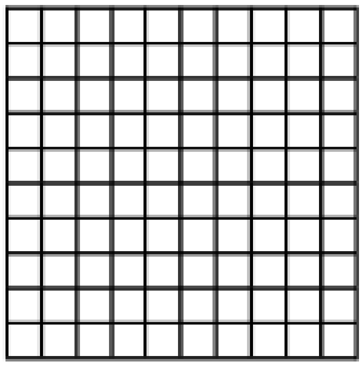
20 % ………. x Kč

$$x = \frac{540\ \text{Kč}\ .\ 20\ \%}{100\ \%} = 108\ \text{Kč}$$

16. Určete, kolik cm^2 má 1 dm^2. Jaká část 1 dm^2 je 1 cm^2?

Řešení s metodickým komentářem:

Je vhodné si do sešitu nakreslit čtverec o obsahu 1 dm^2, tj. o straně 1 dm, a rozdělit každou stranu na cm.



Obrázek 10. Racionální čísla, poměr, úměra, měřítko, procenta – příklad 16 – zadání

Odtud 1 dm^2 = 1 dm . 1 dm = 10 cm . 10 cm = 100 cm^2. Tedy 1cm^2 je $\frac{1}{100}$ dm^2.

Obdobně je vhodné si na podlahu nakreslit 1 m^2 a rozdělit jej na dm^2. Podobně si žáci mohou odvodit i ostatní základní plošné jednotky.

17. Určete, kolik cm^3 má 1 dm^3.

Řešení s metodickým komentářem:

Je vhodné si ujasnit, že 1 dm^3 je krychle o hraně délky 1dm a objemu jeden litr. Ukázat na krychli složené z kostek. Každá hrana měří 1dm a to je 10 cm.

(1 dm^3 = 1 l, 1 cm^3 = 1 ml)

Odtud 1 dm^3 = 10 cm . 10 cm . 10 cm = 1 000 cm^3, což je 1 000 ml.

18. Čtvercová terasa má plochu 80 m^2. K výpočtu délky zábradlí potřebujeme určit délku strany terasy. Určete délku strany terasy v metrech.

Řešení s metodickým komentářem:

Hledáme číslo, které vynásobené samo sebou dá 80, tedy odmocninu z 80. Strana terasy má délku 8,944 m, což je asi 9 m.

19. Krychlová nádoba na vodu zakopaná v zemi má objem 500 litrů. Jak dlouhá je stěna nádoby v cm?

Řešení s metodickým komentářem:

500 litrů je 500 dm^3. Hledáme tedy číslo, jehož třetí mocnina je 500, tedy třetí odmocninu z 500. Stěna nádoby je dlouhá $\sqrt[3]{500} = 7{,}937 \text{ dm} \approx 79 \text{ cm}$.

20. V návodu je napsáno, že potřebujeme 6 litrů postřiku na 100 m^2. Kolik mililitrů postřiku budeme potřebovat, jestliže máme záhonek o rozloze 1 m^2?

Řešení s metodickým komentářem:

Jedná se o poměr a zároveň o složitější převod jednotek. Je vhodné žákům objasnit jednoduchý matematický postup, který pak lze využít pro všechny převody jednotek.

Dávkování je $\frac{6 \text{ litrů}}{100 \text{ m}^2} = \frac{6\,000 \text{ ml}}{100 \text{ m}^2} = \frac{60 \text{ ml}}{1 \text{ m}^2}$. Budeme potřebovat 60 ml na 1 m^2.

4 Algebra

Správné pochopení pojmů proměnná, neznámá, algebraický výraz a jejich vztahu s čísly a číselnými výrazy umožňuje používat popis proměnných dějů, s nimiž se žáci setkají v běžném životě i odborném vzdělávání. Základem je pochopení vztahu mezi konkrétní slovně popsanou situací a jejím popisem pomocí písmen a matematických symbolů. Zároveň se však vyžaduje od žáků oborů E vysoký stupeň abstrakce.

Žáci v oborech E si osvojují algebraické myšlení ve třech úrovních:

1. Využívání vztahu mezi reálnou slovně zadanou situací a jejím popisem pomocí proměnných (písmen) a vztahů mezi nimi pomocí matematických symbolů známých z aritmetiky.
2. Zvládnutí zadaných jednoduchých úprav algebraických výrazů a řešení jednoduchých lineárních rovnic.
3. Řešení problémů pomocí algebraických výrazů a jednoduchých lineárních rovnic.

Základem algebraického uvažování je pochopení vztahu mezi určitou slovně vyjádřenou situací a jejím popisem pomocí písmen a matematických symbolů známých z aritmetiky (nerovnost, rovnost, součet, rozdíl, podíl, součin, mocnina, odmocnina). Žáci by měli řešit dostatečný počet úloh, ve kterých zapisují slovní výroky symboly. Měli by za symbolikou proměnné vidět možné konkrétní počty objektů. Teprve potom by měli přistoupit k úpravám algebraických výrazů, využívat přitom znalosti z geometrie.

Dosazováním číselných hodnot do algebraických výrazů a výpočtem jejich hodnot pro zadané hodnoty zdůrazňujeme souvislost mezi číselnými hodnotami a proměnnými, a to zejména v úlohách z reálného světa a v úlohách z oboru vzdělání žáků.

Součástí algebry v oborech E je i řešení jednoduchých lineárních rovnic. Je dobré ukázat na modelech, jak jsou důležité ekvivalentní úpravy rovnic, aby žáci pochopili, kdy se výsledek nezmění. Důležité je modelování, např. porovnávání s rovnováhou a nerovnováhou na vahách, porovnávání počtu objektů před a po úpravě, využít lze i výpočetní techniku. Je třeba využít pomůcky, které má učitel k dispozici. Nedílnou součástí je zkouška z hlediska správnosti matematického postupu a zkouška z hlediska věcné správnosti výsledku.

Zejména vyvození vlastností vztahů mezi proměnnými vyžaduje jistou míru abstrakce. Je významně závislé na intelektových předpokladech žáka a úroveň jeho zvládnutí bude tedy v oborech E diferencovaná. Je třeba nastavit úroveň nároků na žáka v této oblasti tak, aby byla motivující a rozvíjela intelektové schopnosti žáka, ale aby nároky nebyly přemrštěné a nezpůsobovaly demotivaci žáka. K výuce je třeba využívat příklady spojené se zkušenostmi žáků z každodenního života a z oboru jejich vzdělání, zejména grafické modelování situací s využitím digitálních technologií.

4.1 Očekávané výsledky učení

Při řešení úloh z jejich běžného života nebo oboru vzdělání žáci:

- porozumí textu jednoduché úlohy a vyřeší ji známými postupy;
- kontrolují výsledek z hlediska početního postupu i věcného významu výsledku;
- zformulují odpověď k získanému výsledku;
- *vytvoří jednoduchou slovní úlohu dle vzoru*.

Přitom:

1. Žáci matematizují jednoduché reálné situace s využitím proměnných:
   - popíšou zadanou situaci pomocí písmen a matematických symbolů (nerovnost, rovnost, součet, rozdíl, podíl, součin, mocnina, odmocnina);
   - vyberou odpovídající výraz, který popisuje reálnou situaci.

2. Žáci určí hodnotu výrazu, sčítají a násobí mnohočleny:
   - vypočítají hodnotu výrazu s jednou proměnnou;
   - vypočítají hodnotu výrazu s více proměnnými pro dané hodnoty proměnných;
   - *vypočítají, kdy má jednoduchý výraz s jednou proměnnou zadanou hodnotu*;
   - *sečtou nebo vynásobí dva jednoduché jednočleny nebo dvojčleny*;
   - při výpočtech používají výpočetní techniku (kalkulátory).

3. *Žáci modelují a řeší reálnou situaci pomocí lineární rovnice*:
   - *vyřeší jednoduchou lineární rovnici a provedou zkoušku*;

– *vyřeší slovní úlohu na lineární rovnice a ověří správnost řešení z matematického i věcného hlediska*;

– *při výpočtech používají výpočetní techniku.*

4.2 Ukázkové úlohy

Úlohy odpovídající náročnějším očekávaným výsledkům učení: 1c, 1d, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 13

1. Zjednodušte:

a) $1 + x + 3 =$ c) $3x - (4 + x) =$

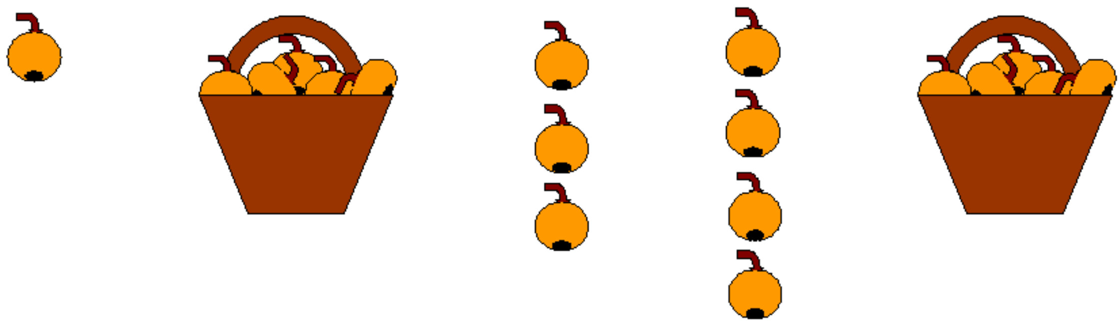
b) $2y + x + y =$ d) $2x - (x - 2) =$

Řešení s metodickým komentářem:

Je třeba, aby se žáci naučili chápat význam neznámých x, y aj. Proto je vhodné je motivovat grafickými schématy, obrázek popsat slovy. Například neznámé množství x a y reprezentuje různě velký košík. Můžeme takto znázornit základní matematické operace a usnadnit tak porozumění problematice na základě konkrétní představy. Situaci lze realizovat i s konkrétními objekty (nejen obrázkem).

a)

$$\mathbf{1} \quad + \quad \boldsymbol{x} \quad + \quad \mathbf{3} \quad = \quad \mathbf{4} \quad + \quad \boldsymbol{x}$$



Obrázek 11. Algebra – příklad 1a – řešení

b)

$$\mathbf{2}\boldsymbol{y} \quad + \quad \boldsymbol{x} \quad + \quad \boldsymbol{y} \quad = \quad \boldsymbol{x} \quad + \quad \mathbf{3}\boldsymbol{y}$$

Obrázek 12. Algebra – příklad 1b – řešení

c)

Odčítání je znázorněno přeškrtnutými objekty. Od tří košíků odebíráme (dáváme někomu jinému) košík a 4 jablka, dostáváme dva košíky, ve kterých chybí celkem 4 jablka, nebo dva košíky a v každém chybí dvě jablka.

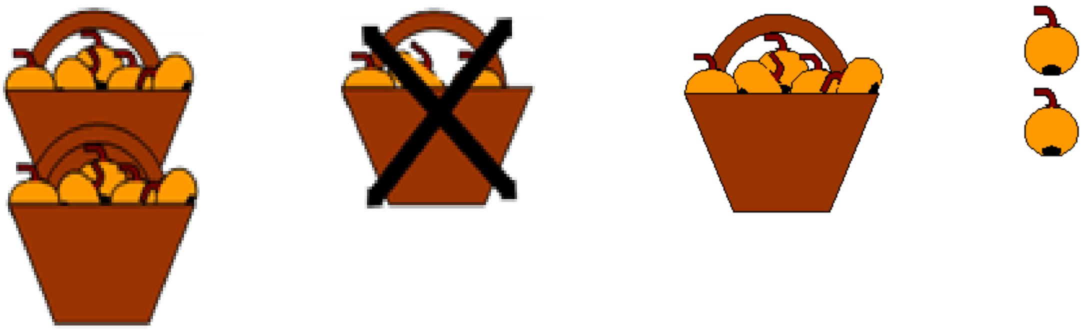
$$3x \quad - \quad (4 + x) \quad = \quad \begin{matrix} 2x - 4 \\ 2\,.\,(x - 2) \end{matrix}$$

Obrázek 13. Algebra – příklad 1c – řešení

d)

Odčítání je znázorněno přeškrtnutými objekty. Od dvou košíků odebíráme (dáváme někomu jinému) košík bez dvou jablek, dostáváme košík a dvě jablka.

$$2x \quad - \quad (x - 2) \quad = \quad x \quad + \quad 2$$



Obrázek 14. Algebra – příklad 1d – řešení

2. Nahraďte slovní popis algebraickým výrazem a určete jeho hodnotu:
   a) součet čísel x a y zmenšený o dvojnásobek čísla z; $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$
   b) trojnásobek čísla x zmenšený o 3 a vydělený číslem y; $x = 5$, $y = 2$
   c) druhá mocnina součtu čísel x a y zmenšená o druhou odmocninu z čísla z; $x = 1$, $y = 3$, $z = 9$

   Řešení s metodickým komentářem:

   Žáci si musí uvědomit, že algebraický výraz je spojení konstant a proměnných pomocí aritmetických operací. Dosazením hodnot za proměnné dostanou číselný výraz, který musí spočítat.

   a) $(x + y) - 2z$; $(5 + 3) - 2 \,.\, 1 = 8 - 2 = 6$
   b) $(3x - 3) : y$; $(3 \,.\, 5 - 3) : 2 = (15 - 3) : 2 = 12 : 2 = 6$
   c) $(x + y)^2 - \sqrt{z}$; $(1 + 3)^2 - \sqrt{9} = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$

3. Dosaďte za proměnné zadaná čísla a určete hodnotu výrazu:
   a) $2x + y - 2z$; $x = 5$, $y = 3$, $z = 1$
   b) $(4x - 2) : y$; $x = 5$, $y = 2$
   c) $(x - y)^2 - \sqrt{y}$; $x = 7$, $y = 4$

   Řešení s metodickým komentářem:

   Dosazením číselných hodnot za proměnné dostanou žáci číselný výraz, který musí spočítat.

   a) $2 \,.\, 5 + 3 - 2 \,.\, 1 = 10 + 3 - 2 = 11$
   b) $(4 \,.\, 5 - 2) : 2 = (20 - 2) : 2 = 18 : 2 = 9$
   c) $(7 - 4)^2 - \sqrt{4} = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

4. Dva muži pracují na výkopu příkopu. První vykopal za hodinu p metrů a druhý vykopal za hodinu o 3 metry méně. Kolik metrů příkopu vykopali za 5 hodin, jestliže pracovali stejným tempem? Předpokládejme, že první muž vykopal za hodinu 7 metrů zeminy.

   Řešení s metodickým komentářem:

   Žáci nejprve sestaví algebraický výraz a teprve potom číselný výraz.

   Musí si uvědomit, že za hodinu vykopou $p + (p - 3)$.

   Za 5 hodin pak vykopou $5 \,.\, [p + (p - 3)] = 5 \,.\, (2p - 3) = 10p - 15$.

   Po dosazení za p dostanou $10 \,.\, 7 - 15 = 70 - 15 = 55$.

   Za 5 hodin muži vykopali 55 m zeminy.

5. Roznásobte:

   a) $(4 + 3) \,.\, (2 + 5) =$

   b) $x \,.\, (3 + x) =$

   c) $(x + y) \,.\, (x + 3) =$

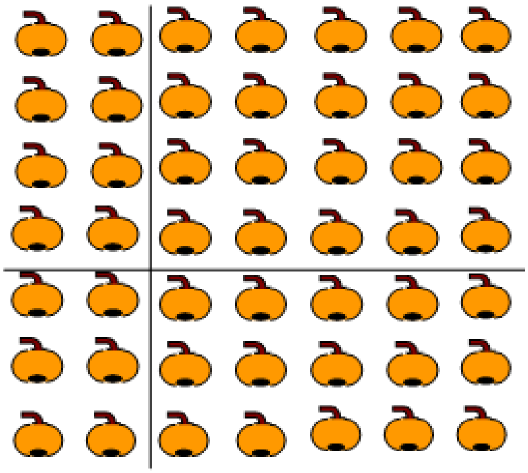
   Řešení s metodickým komentářem:

   Je vhodné, aby si žáci, kteří nemají představivost, pomocí vhodných schémat vytvořili představu, jak operace s proměnnými probíhají. Jedná se i o propedeutiku obsahů čtverce a obdélníka, případně geometrického významu základních algebraických vztahů.

   Existují žáci, kteří se základní operace učí zpaměti jako algoritmus, jehož význam jim uniká, ale učitel by se měl snažit, aby takových žáků bylo co nejméně. A i ti by měli vidět nějakou ukázku, aby mohli nahlédnout, proč to tak funguje. U žáků se vzdělávacími problémy a omezeným abstraktním myšlením by bylo ideální, kdyby operace s konkrétními počty objektů prováděli manipulativně.

   a)

$$\mathbf{(4 + 3) \,.\, (2 + 5) = 4 \,.\, 2 + 4 \,.\, 5 + 3 \,.\, 2 + 3 \,.\, 5}$$
$$\mathbf{7 \,.\, 7 = 49}$$

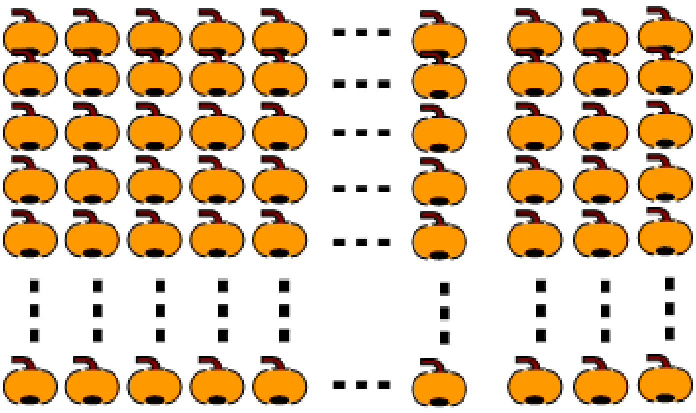


Obrázek 15. Algebra – příklad 5a – řešení

Obrázek objasňuje význam součinu 7 . 7 (7 řádků po 7 jablkách) a zároveň objasňuje roznásobení závorek na konkrétním případu, kdy se skládá výsledek ze čtyř součinů (4 části obrázku: 4 řádky po 2 jablkách, 4 řádky po 5 jablkách, 3 řádky po 2 jablkách a 3 řádky po 5 jablkách).

b)

$$\boldsymbol{x \,.\, (x + 3) = x^2 + x \,.\, 3}$$

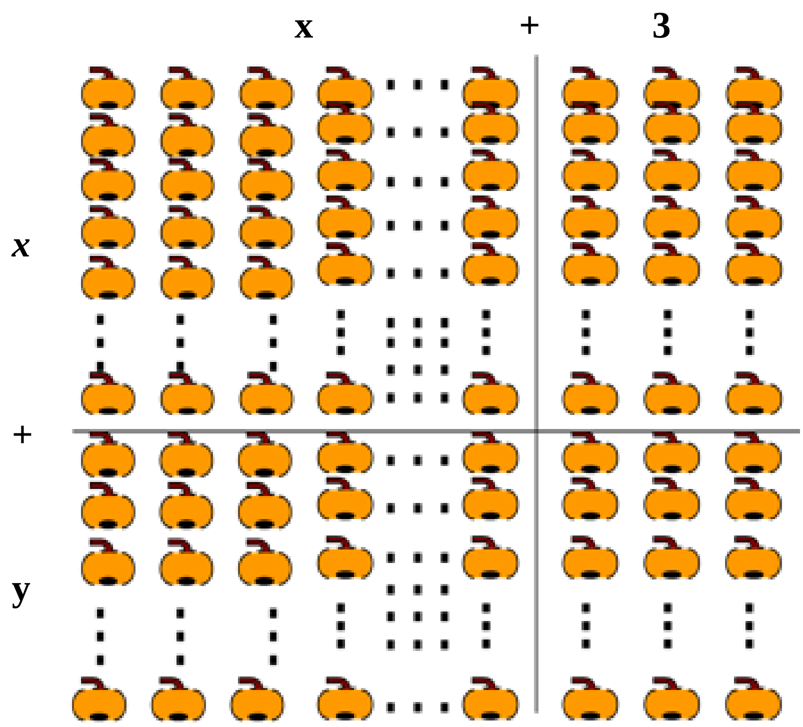


Obrázek 16. Algebra – příklad 5b – řešení

Obrázek objasňuje význam roznásobení závorky neznámou, kdy se skládá výsledek ze dvou částí (části obrázku: *x* řádků po *x* jablkách, *x* řádků po 3 jablkách).

c)

$$\boldsymbol{(x + y) \,.\, (x + 3) = x \,.\, x + x \,.\, 3 + y \,.\, x + y \,.\, 3 = x^2 + 3x + xy + 3y}$$



Obrázek 17. Algebra – příklad 5c – řešení

Obrázek objasňuje význam roznásobení dvou závorek s dvojčleny, kdy se skládá výsledek ze čtyř součinů (4 části obrázku: x řádků po x jablkách, x řádků po 3 jablkách, *y* řádků po *x* jablkách a y řádků po 3 jablkách).

6. Zjednodušte výrazy a určete jejich hodnotu pro $x = 2$:

   a) $y = 2 \,.\, (x + 1) - 3 \,.\, (x - 2)$

   b) $y = 3x \,.\, (x + 3) - 2x \,.\, (x - 1) + 2x - 3$

   c) $y = (x + 4) \,.\, (x - 2) + (x - 1) \,.\, (x + 1) - 2x + 5$

   Řešení s metodickým komentářem:

   a) $y = 2x + 2 - 3x + 6 = -x + 8 \;\Rightarrow\; y = -2 + 8 = 6$

   b) $y = 3x^2 + 9x - 2x^2 + 2x + 2x - 3 = x^2 + 13x - 3 \;\Rightarrow\; y = 2^2 + 13 \,.\, 2 - 3 = 4 + 26 - 3 = 27$

   c) $y = x^2 + 4x - 2x - 8 + x^2 - 1 - 2x + 5 = 2x^2 - 4 \;\Rightarrow\; y = 2 \,.\, 2^2 - 4 = 4$

7. Platí $x - 1 = 3$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

   a) $2 \,.\, (x - 1) =$

   b) $3 \,.\, (x - 1) - 2 \,.\, (x - 1) =$

   c) $(x - 1) \,.\, (x + 1) - 3 \,.\, (x - 1) =$

Řešení s metodickým komentářem:

Tato úloha se dá řešit tak, že za hodnotu x – 1 se do každého výrazu dosadí hodnota 3. Žáci tak dojdou k následujícím výsledkům:

a) $2 \,.\, 3 = 6$

b) $3 \,.\, 3 - 2 \,.\, 3 = 3$

c) $3 \,.\, (x + 1) - 2 \,.\, 3 = 3x + 3 - 6 = 3x - 3 = 3 \,.\, (x - 1) = 3 \,.\, 3 = 9$

8. Na pozemku školy byl postaven plavecký bazén, který má délku a, šířku b a hloubku c. Bazén má následující rozměry: $a = 15$ m, $b = 6$ m a $c = 1{,}5$ m. Určete:

a) plochu hladiny

b) jakou plochu bude potřeba vykachlíčkovat

c) kolik litrů vody se do bazénu vejde

Řešení s metodickým komentářem:

Bazén má tvar kvádru. Plocha hladiny bazénu se vypočte podle vzorce $S = a \,.\, b$. Vykachlíčkovat bude potřeba dno bazénu a jeho stěny. Plocha dna se rovná ploše hladiny. Obsah stěn se vypočte podle vzorců $S_1 = a \,.\, c$ a $S_2 = b \,.\, c$. Protože má bazén vždy dvě stejné stěny, tak pro vykachlíčkovanou plochu platí $S = a \,.\, b + 2 \,.\, (a \,.\, c + b \,.\, c)$. Objem vody v bazénu se vypočte podle vzorce pro objem kvádru $V = a \,.\, b \,.\, c$.

a) $S = a \,.\, b = 15 \,.\, 6 = 90$ m^2

b) $S = a \,.\, b + 2 \,.\, (a \,.\, c + b \,.\, c) = 90 + 2 \,.\, (15 \,.\, 1{,}5 + 6 \,.\, 1{,}5) = 90 + 2 \,.\, (22{,}5 + 9) =$
$= 90 + 2 \,.\, 31{,}5 = 153$ m^2

c) $V = a \,.\, b \,.\, c = 15 \,.\, 6 \,.\, 1{,}5 = 135$ m^3 = 135 000 l = 13 500 hl

9. Řešte rovnice:

a) $x + 1 = x + x$

b) $2x = 2$

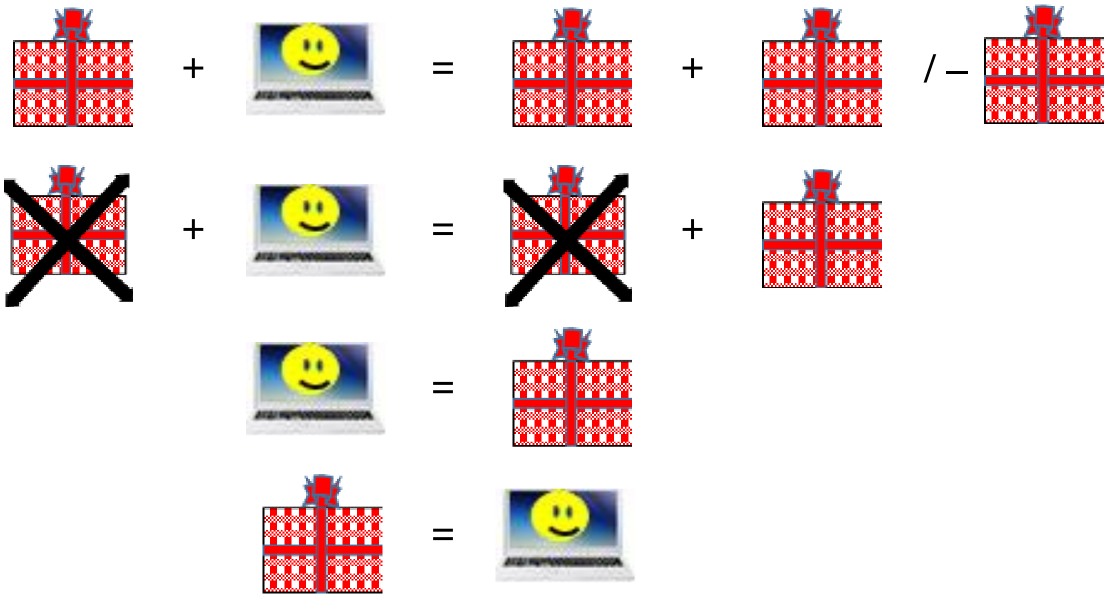
c) $2 \,.\, (x - 1) = x + 2$

Řešení s metodickým komentářem:

Zvláště u žáků s omezeným abstraktním myšlením a žáků znevýhodněných je nutné na konkrétních objektech ukázat princip ekvivalentních úprav. Je vhodné, aby žáci poznali řádné užití dané úpravy na jednoduchém příkladu, a tak měli šanci porozumět rutinnímu zvládnutí řešení lineárních rovnic.

a)

$$x \quad + \quad 1 \quad = \quad x \quad + \quad x$$



$$x = 1$$

Obrázek 18. Algebra – příklad 9a – řešení

b)

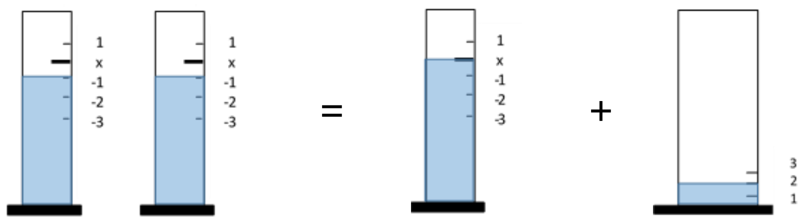
$$2x = 2$$

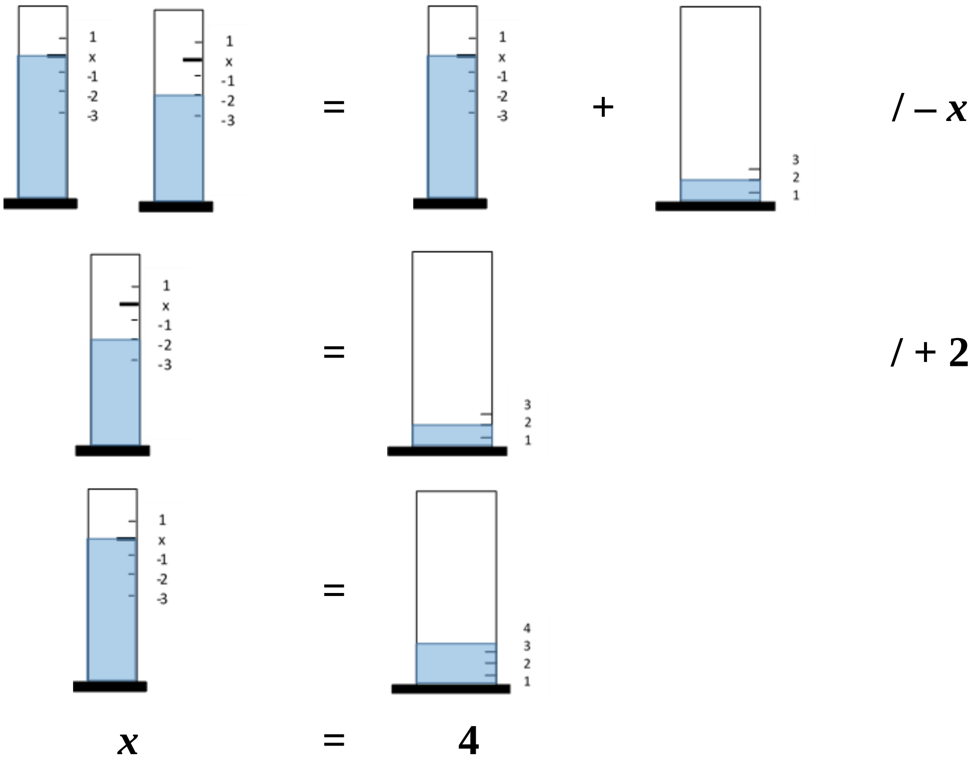
$$x = 1$$

Obrázek 19. Algebra – příklad 9b – řešení

c)

$$2 \,.\, (x - 1) = x + 2$$





Obrázek 20. Algebra – příklad 9c – řešení

V případě záporných čísel je nutné použít jiný model – například odměrné válce. V případě malého množství žáků je vhodné provést řešení nejen na modelu, ale i s konkrétními objekty.

10. Řešte rovnice a proveďte zkoušku správnosti:

a) $3x - 2 + 4x - 3 = 2$

b) $3 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (2x + 3) = 5 - 2 \cdot (1 - x)$

c) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{6x-1}{6}$

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí dodržovat postup při odstraňování závorek a sčítání mnohočlenů. Dále si musí osvojit ekvivalentní úpravy rovnic (kořeny rovnice se nezmění, jestliže k oběma stranám rovnice přičteme nebo od nich odečteme stejné číslo a jestliže obě strany rovnice vynásobíme nebo vydělíme stejným číslem).

a)

$3x - 2 + 4x - 3 = 2$	Zkouška:
$7x - 5 = 2$	L(1) = 3 . 1 – 2 + 4 . 1 – 3 =

$7x = 7$ $\quad$ $= 3 - 2 + 4 - 3 = 2$

$x = 1$ $\quad$ $P(1) = 2$

$L = P$

b)

$3 \,.\, (x - 2) - 2 \,.\, (2x + 3) = 5 - 2 \,.\, (1 - x)$

$3x - 6 - 4x - 6 = 5 - 2 + 2x$

$-x - 12 = 5 - 2 + 2x$

$-3x = 15$

$x = -5$

Zkouška:

$L(-5) = 3 \,.\, (-5 - 2) - 2 \,.\, (2 \,.\, (-5) + 3) =$

$= -21 - 2 \,.\, (-7) = -21 + 14 = -7$

$P(-5) = 5 - 2 \,.\, (1 - (-5) = 5 - 2 \,.\, 6$

$= 5 - 12 = -7$

$L = P$

c)

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+3}{3} = \frac{6x-1}{6}$$

$3x - 3 + 2x + 6 = 6x - 1$

$5x + 3 = 6x - 1$

$x = 4$

Zkouška:

$L(4) = \dfrac{4-1}{2} + \dfrac{4+3}{3} = \dfrac{9+14}{6} = \dfrac{23}{6}$

$P(4) = \dfrac{6\,.\,4-1}{6} = \dfrac{23}{6}$

$L = P$

11. Metr látky byl zlevněn o 120 Kč. Nyní stojí 6 metrů této látky stejně, jako dříve 8 metrů. Určete starou a novou cenu látky.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci s pomocí učitele udělají rozbor úlohy a na jeho základě sestaví rovnici. Musí si uvědomit, že 6 m látky za novou cenu stojí stejně jako 8 m látky za starou cenu. Po vyřešení úlohy by měli provést zkoušku dosazením do podmínek úlohy.

původní cena: x Kč

nová cena: (x – 120) Kč

$6x = 8 \,.\, (x - 120)$

$6x = 8x - 960$

$2x = 960$

$x = 480$

Zkouška:

$x - 120 = 360$

$6 \,.\, 480 = 2880$

$8 \,.\, 360 = 2880$

Původní cena látky byla 480 Kč, nová cena je 360 Kč.

12. Dráha *s*, kterou urazí automobil, se vypočítá podle vzorce $s = v \,.\, t$, kde *v* je rychlost a *t* je čas. Vypočítejte, jak dlouho bude trvat, než rychlostí 80 km/h ujedeme 8 km.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci sestaví zkrácené zadání. Spojí veličiny ze vzorce se zadanými hodnotami veličin a dosadí do vzorce. Pak vyřeší rovnici.

$s = 8$ km, $v = 80$ km/h $\Rightarrow$ $8 = 80 \,.\, t$ $\Rightarrow$ $t = 8 : 80 = 0{,}1$

Doba jízdy je desetina hodiny, tedy 6 minut.

13. Množství kreditu na telefon se vypočítá podle vzorce $k = p - s \,.\, t$, kde p je původní hodnota kreditu v Kč, s je sazba (Kč za provolanou minutu) a t je počet provolaných minut. Kolik minut t můžeme provolat při sazbě 3,50 Kč/min, jestliže máme na mobilu kredit 300 Kč a nechceme, aby nám klesl pod 100 Kč?

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci sestaví zkrácené zadání. Spojí veličiny ze vzorce se zadanými hodnotami veličin a dosadí do vzorce. Pak vyřeší rovnici.

k = 100 Kč, p = 300 Kč, s = 3,50 Kč/min $\Rightarrow$ $100 = 300 - 3{,}50 \,.\, t$

$\Rightarrow$ $t = 200 : 3{,}50 = 57{,}14$

Můžeme provolat 57 minut.

5 Závislosti, vztahy a práce s daty

Zejména s nástupem digitálních technologií se stal běžnou záležitostí popis změn a závislostí v jevech z běžného života, v manuálech k použití technologií a k činnosti technických zařízení. Čtení a interpretace dat, závislostí a jejich grafického znázornění je potřebnou dovedností občanů v 21. století. K poznávání určitého typu změn a závislostí je žádoucí matematická dovednost, ke které je třeba dovést i žáky oborů E. Vztahy proměnných a vlastnosti závislostí proměnných žáci zjišťují z algebraických výrazů (funkčních rovnic) nebo z tabulek, grafů a diagramů a slovně je popisují.

V jednoduchých úlohách vhodným způsobem třídí data, zpracovávají je a své závěry slovně formulují ve třech úrovních:

1. Vyhledání požadovaných údajů v jednoduché tabulce, přehledném grafu nebo diagramu včetně správného určení jednotek zjištěných dat a jejich porovnání; určení požadované hodnoty veličiny z funkčního vztahu.
2. Provedení a zpracování jednoduchého pozorování.
3. Vyhledání a vyjádření vztahu mezi údaji v tabulce, grafu nebo diagramu, určení vlastností vztahu.

Zejména vyvození vlastností vztahů mezi proměnnými vyžaduje jistou míru abstrakce. Je významně závislé na intelektových předpokladech žáka a úroveň jeho zvládnutí bude tedy v oborech E diferencovaná. Je třeba nastavit úroveň nároků na žáka v této oblasti tak, aby byly motivující a rozvíjely intelektové schopnosti žáka, ale nebyly přemrštěné a nezpůsobovaly demotivaci žáka. K výuce je třeba využívat příklady spojené se zkušenostmi žáků z každodenního života a z oboru jejich vzdělání, zejména grafické modelování situací s využitím digitálních technologií.

5.1 Očekávané výsledky učení

Při řešení úloh z jejich běžného života nebo oboru vzdělání žáci:

- porozumí textu jednoduché úlohy a vyřeší ji známými postupy;
- kontrolují výsledek z hlediska početního postupu i věcného významu výsledku;

– zformulují odpověď k získanému výsledku;
– vytvoří jednoduchou slovní úlohu dle vzoru.

Přitom:

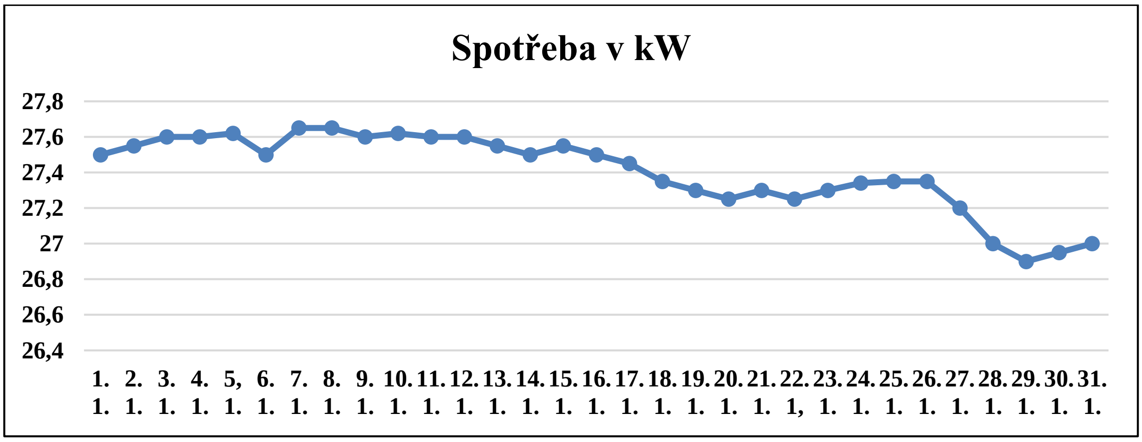
1. Žáci vyhledávají, vyhodnocují a zpracovávají data:
   – provádějí a zaznamenávají jednoduchá pozorování (měření teploty, sportovní výkony);
   – vyhledají potřebné údaje v tabulce, grafu a diagramu (sloupcovém, kruhovém a spojnicovém);
   – vyhledají a vyjádří vztahy mezi údaji v tabulce, grafu a diagramu (četnost, nejmenší a největší hodnota, aritmetický průměr);
   – převádějí údaje z textu do tabulky, grafu a diagramu;
   – vyhledávají data v tisku a na internetu;
   – vhodně a účelně využívají prostředky digitálních technologií.

2. *Žáci určují vztah přímé a nepřímé úměrnosti*:
   – *rozliší přímou a nepřímou úměrnost*;
   – *vytvoří tabulku a graf přímé a nepřímé úměrnosti*;
   – *vhodně a účelně využívají prostředky digitálních technologií.*

5.2 Ukázkové úlohy

Úlohy odpovídající náročnějším očekávaným výsledkům učení: 7, 8, 9

1. V grafu je závislost spotřeby elektrické energie v kW v průběhu měsíce ledna.



Graf 1. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 1 – zadání

a) Určete, kterého dne byla spotřeba největší a kterého dne nejmenší.

b) Které dny byla spotřeba 27,6 kW?

c) Který víkend (sobota, neděle) byla spotřeba nejmenší, jestliže 1. 1. bylo pondělí?

d) Ve kterém týdnu (od pondělí do pátku) došlo k největšímu poklesu spotřeby a o kolik kW to bylo?

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si musí ujasnit význam os a hodnot na nich. Musí porozumět otázkám.

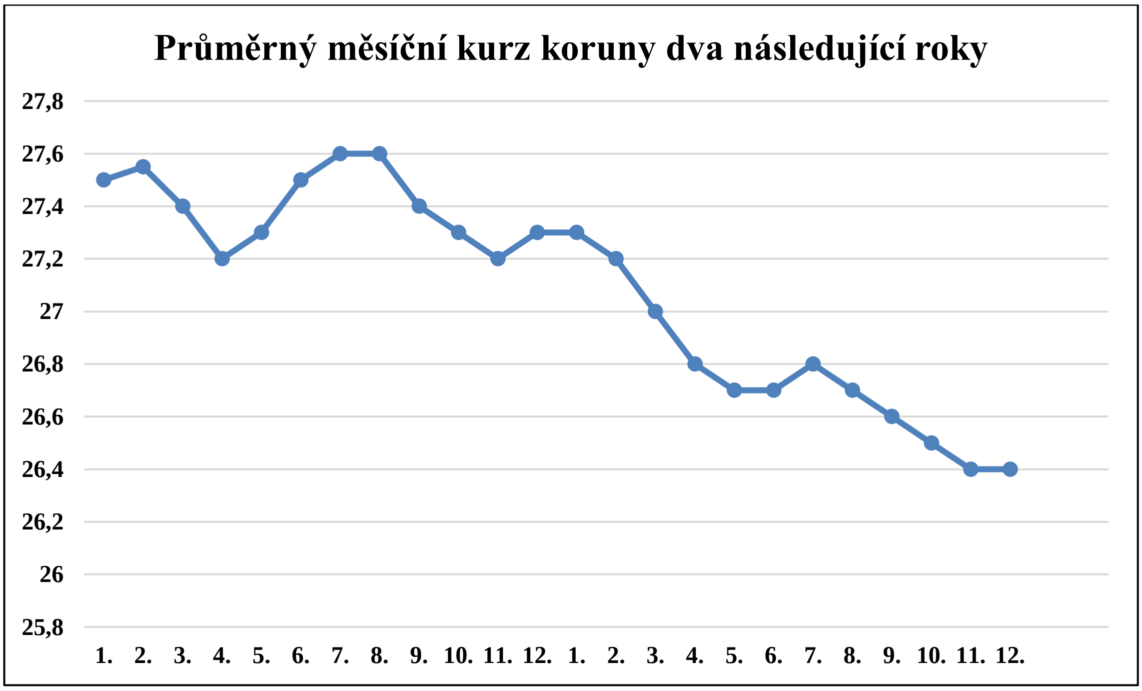
a) Největší spotřeba byla 7. 1. a 8. 1. a nejmenší 29. 1.

b) Hledaná spotřeba byla ve dnech 3. 1., 4. 1., 9. 1., 11. 1. a 12. 1.

c) Nejmenší spotřeba byla v sobotu a v neděli 27. 1. a 28. 1., tedy celkem 54,2 kW.

d) Největší pokles spotřeby proběhl od pondělí 15. 1. do pátku 19. 1., což je o 0,2 kW.

2. V grafu je závislost průměrného měsíčního kurzu koruny za dva po sobě následující roky.



Graf 2. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 2 – zadání

a) Určete, ve kterém měsíci byl kurz koruny nejméně výhodný pro nákup zahraniční měny, chcete-li jet na dovolenou.

b) Jsou v grafu nějaké měsíce pro nákup zahraniční měny výhodnější než jiné? Pokud ano, zdůvodni proč.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si musí ujasnit význam kurzu koruny. Nejlépe na konkrétních příkladech.

a) Nejméně výhodný je nákup, jestliže je kurz největší, a to je v 7. a 8. měsíci prvního sledovaného roku.
b) Nejvýhodnější nákup je tehdy, kdy je kurz nejmenší, a v grafu se zdá, že nejmenší (a tedy nejvýhodnější) kurzy jsou v jarních a podzimních měsících a nejvyšší v letních a zimních měsících. Je možné se domnívat, že hlavní vliv na kolísání hodnoty kurzu během roku v těchto dvou letech měly letní či zimní dovolené.

3. Při poukazování peněžních obnosů poštovními poukázkami s urychlenou výplatou typu D se u České pošty podle sazebníku platného od 1. 4. 2019 platí poplatek podle této stupnice:

1 Kč	–	1 000 Kč	93 Kč
1 001 Kč	–	5 000 Kč	104 Kč
5 001 Kč	–	50 000 Kč	126 Kč

Za každých dalších započatých 10 000 Kč se připlácí 13 Kč.

Určete, kolik zaplatíte, jestliže chcete poukázat:

a) 2 000 Kč
b) 75 000 Kč

Řešení s metodickým komentářem:

Je nutné porozumět zadání a z dat si vyhledat výši poplatků.

a) 2 000 Kč je ve druhém rozmezí, tedy zaplatíme 104 Kč.
b) 75 000 Kč je víc než 50 000, tedy ke 126 Kč je nutno přičíst třikrát 13 Kč, tedy zaplatíme celkem 165 Kč.

4. Družstvo školy se zúčastnilo přeboru v atletickém čtyřboji. Petr zaznamenával výsledky svých kamarádů do tabulky:

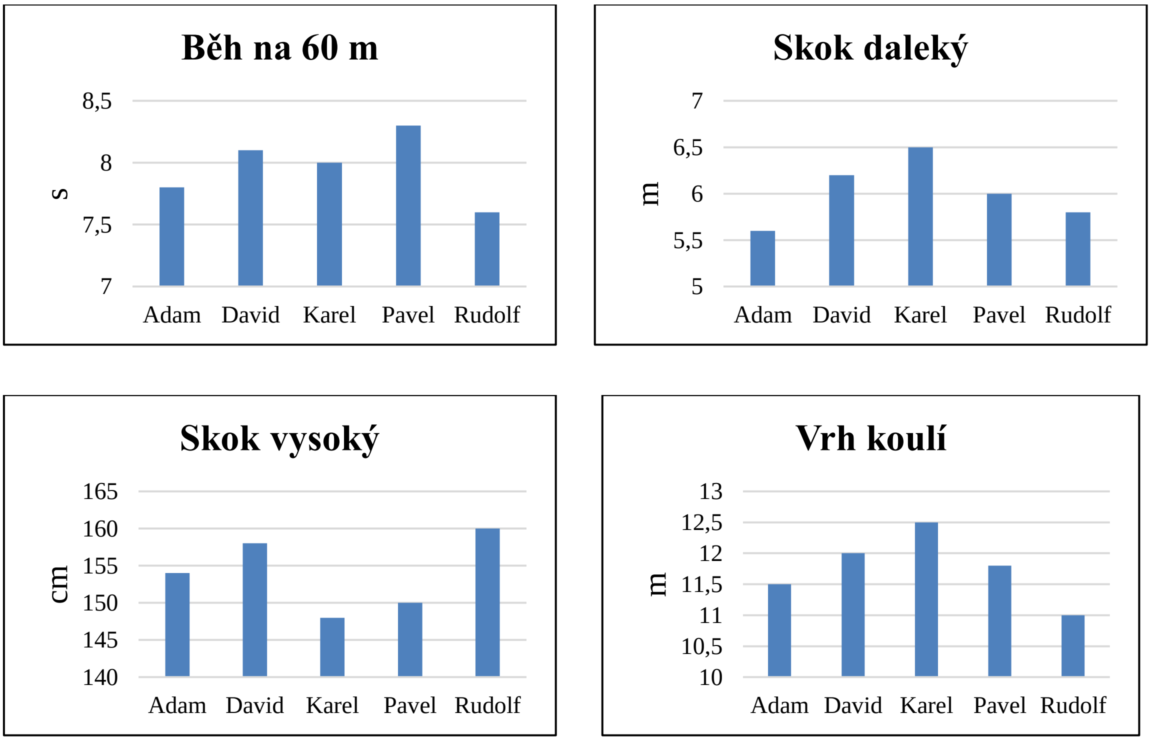
Tabulka 1. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 4 – zadání

	Adam	David	Karel	Pavel	Rudolf
Běh na 60 m	7,8 s	8,1 s	8,0 s	8,3 s	7,6 s
Skok daleký	5,6 m	6,2 m	6,5 m	6 m	5,8 m
Skok vysoký	154 cm	158 cm	148 cm	150 cm	160 cm
Vrh koulí	11,5 m	12 m	12,5 m	11,8 m	11 m

Sestrojte sloupcové diagramy jednotlivých disciplín a určete, který z chlapců získal pro družstvo nejvíce bodů a který nejméně. Počet bodů, které získal každý z chlapců, odpovídá součtu jeho umístění: nejmenší součet = nejvíce bodů a naopak.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se orientují v tabulce a s pomocí některého programu pro práci s tabulkami a grafy sestrojí dané grafy. Z grafů určí umístění jednotlivých chlapců. Na jejich základě potom vyhodnotí přínos jednotlivých závodníků do celkového hodnocení družstva.

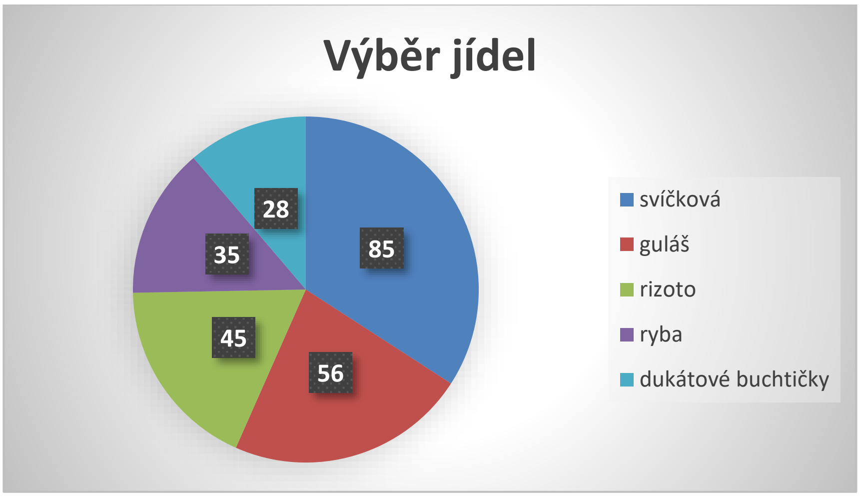


Graf 3. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 4 – řešení

Tabulka 2. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 4 – řešení

	Adam	David	Karel	Pavel	Rudolf
Běh na 60 m	4	2	3	1	5
Skok daleký	5	2	1	3	4
Skok vysoký	3	2	5	4	1
Vrh koulí	4	2	1	3	5
Součet	**16**	**8**	**10**	**11**	**15**
	získal nejméně bodů	získal nejvíce bodů			

5. Žáci oboru kuchař-číšník dostali na praxi v restauraci úkol sledovat, jaká jídla si hosté během oběda vybrali z jídelního lístku. Ze svých pozorování vytvořili kruhový diagram dle počtu hostů, kteří si dali daný typ jídla.



Graf 4. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 5 – zadání

Z diagramu určete:

a) Kolik hostů přišlo na oběd.

b) Které jídlo bylo mezi hosty nejoblíbenější.

c) O kolik hostů více dalo před rybou přednost svíčkové.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se orientují v grafu. Určí, kolik hostů navštívilo v poledne restauraci a jaká jídla si objednali. Učitel by je měl vést v diskusi s nimi k tomu, aby si uvědomili, k čemu takový průzkum může vést. Například že na jeho základě může restaurace rozhodnout, jak by měla sestavovat jídelníček, který by vyhovoval jejím návštěvníkům.

a) Na oběd přišlo 249 hostů.
b) Nejoblíbenější mezi hosty je svíčková.
c) Víme, že svíčkové před jiným typem jídla dalo přednost 85 hostů. Rybě před jiným typem jídla dalo přednost 35 hostů. Pokud předpokládáme, že nabídka restaurace byla celou dobu kompletní, pak svíčkovou volilo o 50 hostů víc než rybu.

6. Přečtěte z jízdního řádu jednotlivé údaje a odpovězte na otázky:

Tabulka 3. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 6 – zadání

Linka č. 2	**Odjezdy**								
Nádraží	9:10	9:30	9:50	10:10	10:30	10:50	11:10	11:30	11:50
Náměstí	9:15	9:35	9:55	10:15	10:35	10:55	11:15	11:35	11:55
Nemocnice	9:20	9:40	10:00	10:20	10:40	11:00	11:20	11:40	12:00
Městský úřad	9:25	9:45	10:05	10:25	10:45	11:05	11:25	11:45	12:05
Hotel TRIM	9:30	9:50	10:10	10:30	10:50	11:10	11:30	11:50	12:10

a) Kolik spojů můžete využít na cestu z nádraží k městskému úřadu, abyste se tam dostali před 11:30?
b) Je 10:10. V kolik hodin jede nejbližší spoj od nemocnice k hotelu TRIM?
c) U městského úřadu se máte setkat s kamarádem v 10:30. Kterým spojem od nádraží musíte jet, abyste tam byli včas? Kolik minut budete na kamaráda čekat?

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se učí orientovat v tabulce (jízdním řádu). Učitel je vede k orientaci v čase a místě. Žáci si mohou potom zadávat čas odjezdu ze zvoleného místa a čas příjezdu podle údajů v jízdním řádu. Pro lepší orientaci v jízdním řádu je možné volit spoje, kterými žáci jezdí do školy. Teprve potom mohou žáci plnit zadané úkoly.

a) Od 9:10 odjíždí od nádraží 7 spojů s dvacetiminutovým intervalem. Poslední spoj, kterým můžeme vyjet, je spoj, který od nádraží odjíždí v 11:10.

b) K hotelu TRIM od nemocnice odjíždí nejbližší spoj v 10:20.

c) Od nádraží je nutné vyjet nejpozději v 10:10. Budeme čekat 5 minut.

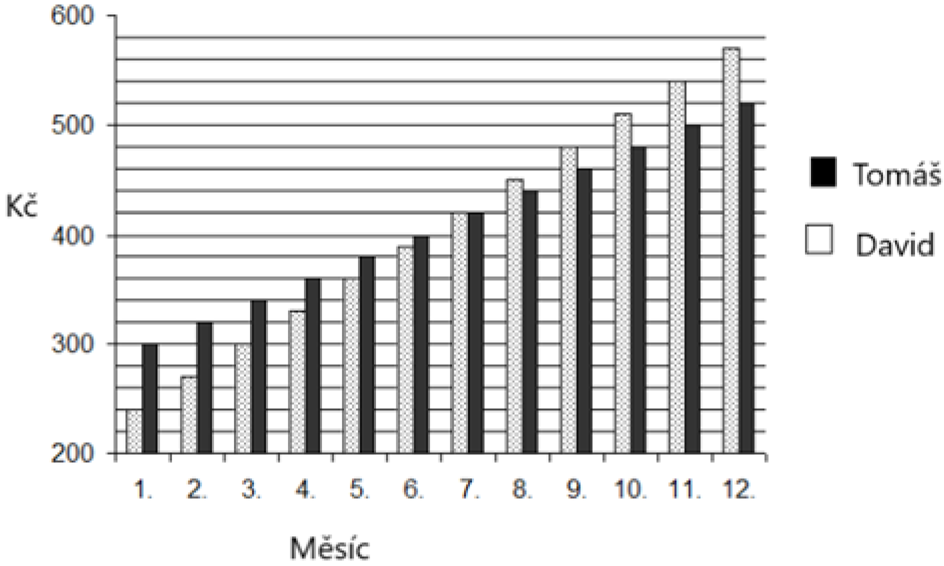
7. David a Tomáš si pravidelně spoří určitou částku peněz. Z diagramu, který znázorňuje jejich úspory za poslední rok, určete:

a) Kolik Kč znázorňuje jeden dílek v diagramu.

b) Kolik Kč měsíčně spoří David.

c) Kolik Kč měsíčně spoří Tomáš.

d) O kolik Kč měl v prosinci naspořeno David více než Tomáš.



Graf 5. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 7 – zadání

Dále rozhodněte o správnosti daných tvrzení.

Tabulka 4. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 7 – zadání

V listopadu měl David o 40 Kč více než Tomáš.	ANO	NE
Na začátku roku měl Tomáš o 60 Kč méně než David.	ANO	NE
Tomáš měl v říjnu naspořenou stejnou částku jako David v září.	ANO	NE
David měl v září o 120 Kč více než v květnu.	ANO	NE
V srpnu měli oba chlapci dohromady našetřeno celkem 1 000 Kč.	ANO	NE
V říjnu měl Tomáš naspořeno dvakrát více korun než David v lednu.	ANO	NE

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se musí orientovat v grafu a číst z něho příslušné údaje. Teprve potom mohou vyhodnocovat, co z grafu vyčetli. Je potřeba, aby si graf pozorně prostudovali a své odpovědi prodiskutovali s učitelem.

a) Jeden dílek znázorňuje 20 Kč.
b) David měsíčně spoří 30 Kč.
c) Tomáš měsíčně spoří 20 Kč.
d) David měl v prosinci naspořeno o 50 kč více než Tomáš.

Správná tvrzení:

Tabulka 5. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 7 – řešení

V listopadu měl David o 40 Kč více než Tomáš.	**ANO**	NE
Na začátku roku měl Tomáš o 60 Kč méně než David.	ANO	**NE**
Tomáš měl v říjnu naspořenou stejnou částku jako David v září.	**ANO**	NE
David měl v září o 120 Kč více než v květnu.	**ANO**	NE
V srpnu měli oba chlapci dohromady našetřeno celkem 1 000 Kč.	ANO	**NE**
V říjnu měl Tomáš naspořeno dvakrát více korun než David v lednu.	**ANO**	NE

8. Cyklista jede průměrnou rychlostí 15 $km.h^{-1}$.
   a) Doplňte údaje v tabulce, jestliže pro výpočet dráhy platí vzorec $s = v \, . \, t$, kde v je rychlost a t je čas.

Tabulka 6. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 8 – zadání

t (h)	1	2	4	6	8	10	12
s (km)	15						

   b) Sestrojte graf dané závislosti a závislost pojmenujte.
   c) Z grafu určete, jakou vzdálenost cyklista ujede za 5 h.

Řešení s metodickým komentářem:

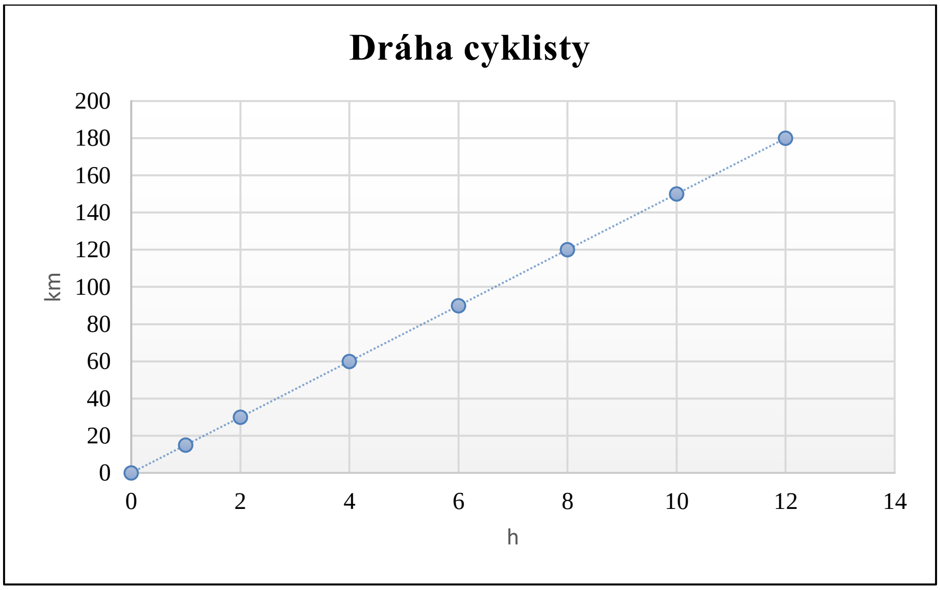
Žáci jsou vedeni k pojmu závislost na příkladu z reálného prostředí. Učitel žáky vede k dovednosti orientovat se na časové ose a přiřazovat jednotlivým časům ujetou dráhu. Je nutné, aby se žáky probral pojmy průměrná rychlost a vzorec pro výpočet dráhy v daném čase. Je vhodné využít nějaký konkrétní podobný příklad ze života (videoprogram, animaci apod.). Ke konstrukci grafu žáci použijí některý z programů pro práci s tabulkami a grafy.

a)

Tabulka 7. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 8 – řešení

t (h)	1	2	4	6	8	10	12
s (km)	15	30	60	90	120	150	180

b) Jedná se o přímou úměrnost.



Tabulka 8. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 8 – řešení

c) Za 5 h cyklista ujede 80 km.

9. Parta brigádníků má za úkol natřít plot kolem fotbalového hřiště. Určete, jak dlouho budou pracovat, jestliže víte, že 1 brigádník by plot natřel za 10 hodin a pět brigádníků by natřelo plot za 2 hodiny. Předpokládáme stejnou výkonnost u všech brigádníků.

a) Údaje doplňte do následující tabulky:

Tabulka 9. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 9 – zadání

Počet brigádníků	1	2	4	5	10
Čas	10				

b) Sestrojte graf dané závislosti a závislost pojmenujte.

Řešení s metodickým komentářem:

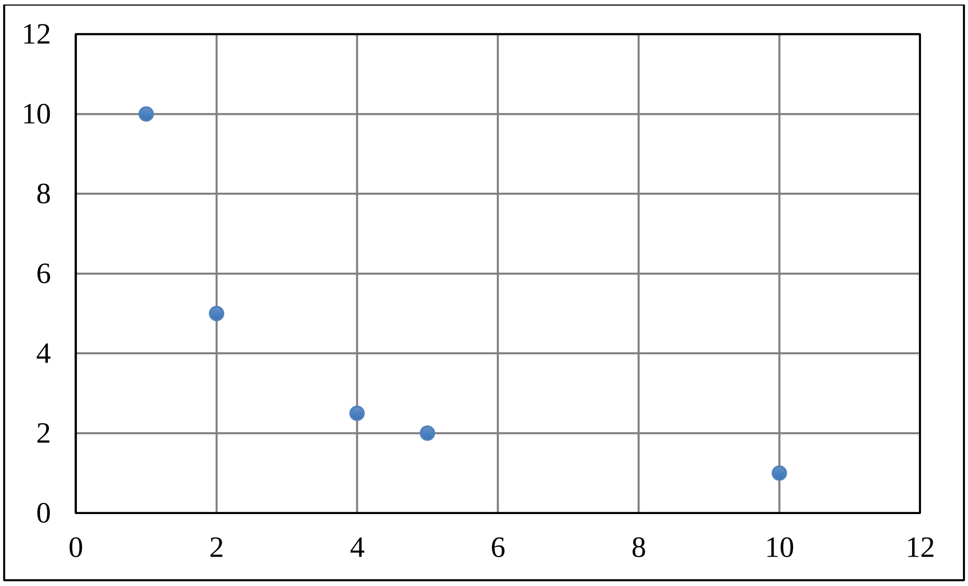
Učitel se žáky odvodí, jak je závislý počet brigádníků na době, za kterou bude plot natřen (při dvojnásobném počtu brigádníků bude práce hotova za poloviční dobu a pak si všimnou, že součin počtu brigádníků a doby práce je konstantní). Vede žáky k tomu, aby si uvědomili, že hodnoty jsou nepřímo úměrné. Na základě diskuse, která proběhne v kolektivu třídy, žáci za pomoci učitele doplní tabulku a sestrojí graf. Ke konstrukci grafu využijí žáci některý z programů pro konstrukci tabulek a grafů nebo mohou graf z důvodu jeho jednoduchosti jen načrtnout tužkou. Protože počty brigádníků jsou přirozená čísla, budou grafem izolované body. Je vhodné diskutovat a uvést, že počet brigádníků může teoreticky neomezeně růst, ale reálně má smysl jen počet, který bude souviset s rozměry natíraného plotu, množstvím barvy, štětců apod.

a) Údaje doplňte do následující tabulky:

Tabulka 10. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 9 – řešení

Počet brigádníků	1	2	4	5	10
Čas	10	5	2,5	2	1

b) Jedná se o nepřímou úměrnost.



Graf 6. Závislosti, vztahy a práce s daty – příklad 9 – řešení

10. Vyhledejte na internetu graf vhodné závislosti a vytvořte otázky, na něž by vás zajímala odpověď. Oboje zpracujte do dokumentu a pošlete (nebo vytisknuté předejte) svému

spolužákovi (např. sousedovi v lavici). Jeho řešení zkontrolujte a ohodnoťte. Své hodnocení zdůvodněte. Seznamte spolužáky se svým problémem a jeho řešením.

Řešení s metodickým komentářem:

Učitel dohlíží na práci žáků. Zohlední množství i předpoklady jednotlivých žáků. V případě malé třídy by neměl být problém práce ve dvojicích, kdy všichni projdou všemi rolemi, ale v případě velké třídy či třídy s širokým rozptylem schopností žáků je vhodnější užít méně větších skupin a roli zadavatele a hodnotitele prostřídat až u jiné úlohy.

Učitel umožní žákům případný tisk zadání, ale vhodnější je elektronické přeposlání. Kontroluje průběh diskuse. Na závěr vyzve dvojice (nebo zástupce skupiny), aby prezentovali před třídou své problémy a jejich řešení, včetně zdůvodnění hodnocení (ostatní mohou diskutovat a vznášet námitky).

6 Geometrie

Geometrické problémy řešíme v každodenním životě, aniž si mnohdy uvědomujeme, že se jedná o geometrický problém (např. měření vzdálenosti, odhad rozměrů objektu, popis vzájemné polohy objektů, orientace v plánku budov, náčrtek polohy a tvaru objektu). Znalost a používání geometrických pojmů a metod je nedílnou součástí výkonu řady profesí.

6.1 Geometrie v rovině

V rámci Geometrie v rovině se žáci učí poznat a popsat vzájemné polohy útvarů v rovině, učí se je porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlů, obvod a obsah rovinných útvarů/obrazců, zdokonalovat svůj grafický projev ve třech úrovních:

1. Správné změření a popis délek, vzdáleností útvarů a úhlů v rovině včetně správného použití jednotek. Rozeznání shodných a podobných rovinných útvarů.
2. Náčrtek jednoduchých rovinných útvarů dle zadání rozměrů a tvaru. Odhad a výpočet obvodu a obsahu jednoduchého rovinného útvaru s použitím digitální techniky (vzorce, výpočty).
3. Náčrt a konstrukce jednoduchých rovinných útvarů dle zadání rozměrů a tvaru a v zadaném měřítku. Odhad a výpočet obvodu a obsahu jednoduchých rovinných útvarů s využitím převodů jednotek, Pythagorovy věty a digitální techniky.

Úspěšné zvládnutí úloh je významně závislé na intelektových předpokladech žáka a úroveň zvládnutí očekávaných výsledků učení bude tedy v oborech E diferencovaná. Je třeba nastavit úroveň nároků na žáka tak, aby byly motivující a rozvíjely intelektové schopnosti žáka, ale nebyly přemrštěné a nezpůsobovaly demotivaci žáka.

6.2 Očekávané výsledky učení

Při řešení úloh z jejich běžného života nebo oboru vzdělání žáci:

- porozumí textu jednoduché úlohy a vyřeší ji známými postupy;
- kontrolují výsledek z hlediska početního postupu i věcného významu výsledku;
- zformulují odpověď k získanému výsledku;
- vytvoří jednoduchou slovní úlohu dle vzoru.

Přitom:

1. Žáci využívají polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů:
   - využívají při řešení úloh praktické náčrtky, schémata, modely;
   - využívají polohové a metrické vlastnosti (*Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost*, vzájemná poloha bodů a přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky) k řešení geometrických úloh;
   - řeší početně geometrické úlohy.

2. Žáci charakterizují a třídí základní geometrické útvary:
   - poznají základní rovinné útvary: přímka, polopřímka, úsečka, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník, pravidelné mnohoúhelníky, kružnice, kruh;
   - rozliší typy úhlů (ostrý, tupý, pravý, přímý), typy trojúhelníků a čtyřúhelníků.

3. *Žáci určí velikost úhlu měřením a výpočtem*:
   - *sčítají a odčítají úhly aritmeticky i graficky*;
   - *využívají při výpočtech součet vnitřních úhlů v trojúhelníku*;
   - *určují velikost úhlu pomocí úhloměrů*.

4. Žáci odhadují a vypočítají obvod a obsah základních rovinných útvarů:
   - odhadují obvod a obsah útvarů pomocí čtvercové sítě;
   - určí výpočtem obvod a obsah trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, kruhu;
   - používají a převádějí jednotky délky a obsahu.

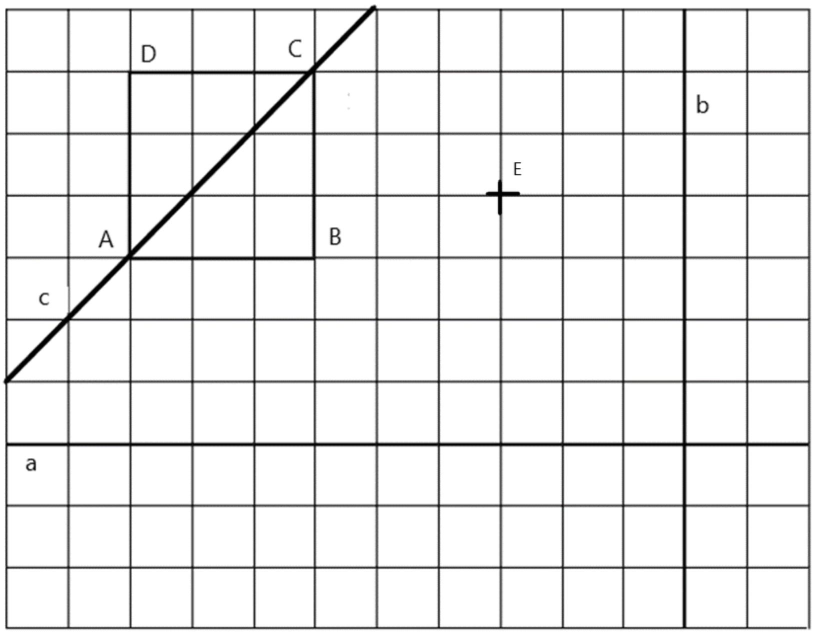
5. Žáci načrtnou a sestrojí rovinné útvary:
   - načrtnou rovinný útvar podle slovního zadání;
   - provedou jednoduché konstrukce (např. osa úsečky, čtverec se zadanou stranou, trojúhelník se zadanými stranami, úhel dané velikosti, rovnoběžka a kolmice daným bodem);
   - ověří, zda výsledný útvar odpovídá zadání.

6. Žáci vyhledají z nabídky dvojice shodných nebo podobných trojúhelníků.

6.3 Ukázkové úlohy

Úlohy odpovídající náročnějším očekávaným výsledkům učení: 4, 5, 8, 9, 10, 18, 19

1. Ve čtvercové síti o straně 1 cm jsou zobrazeny přímky *a*, *b*, AC, čtverec ABCD a bod E.
   a) Určete vzájemnou polohu bodů A, B, C, D, E s přímkami *a*, *b*, AC.
   b) Bodem B veďte rovnoběžku s přímkou AC.
   c) Bodem E veďte rovnoběžku s přímkou *a*.
   d) Bodem E veďte kolmici k přímce *a*.
   e) Určete vzdálenost bodu E od přímek *a* a *b*.
   f) Určete graficky i početně součet délek úseček AB a EP, kde P je průsečík kolmice z bodu E ke přímce *a* s přímkou *a*.



Obrázek 21. Geometrie v rovině – příklad 1 – zadání

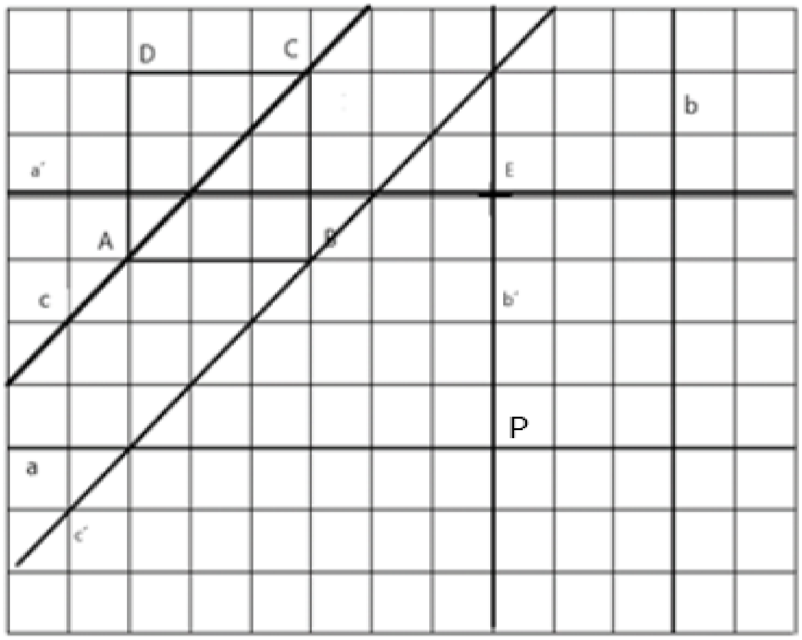
Řešení s metodickým komentářem:

Žáci využijí čtvercovou síť k zakreslení situace a k posouzení polohových vlastností. Nejde o přesné konstrukce, ale o to, aby si žáci uvědomili, jak se daná konstrukce provádí.

a) Body A, B, C, D, E neleží na přímkách *a*, *b*; body B a C jsou body přímky BC.
b) viz obrázek
c) viz obrázek
d) viz obrázek

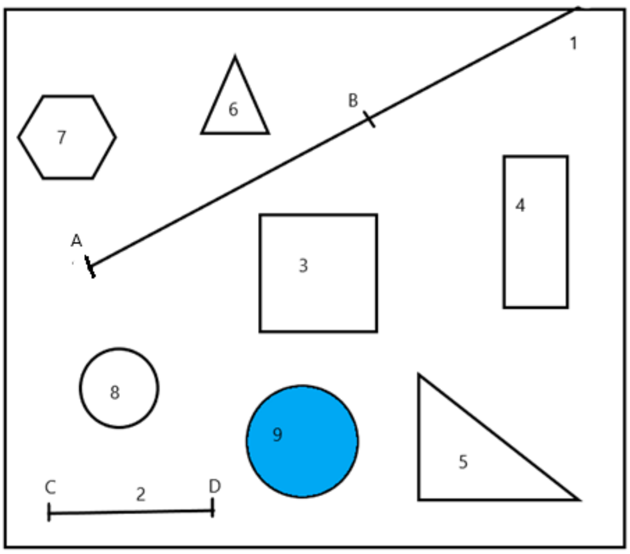
e) Vzdálenost bodu E od přímky *a* je 4 cm, vzdálenost bodu E od přímky *b* je 3 cm.

f) |AB| + |EP| = 3 cm + 4 cm = 7 cm



Obrázek 22. Geometrie v rovině – příklad 1 – řešení

2. Pojmenujte rovinné útvary na obrázku.



Obrázek 23. Geometrie v rovině – příklad 2 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Je důležité, aby žáci poznali jednotlivé rovinné útvary.

1 – polopřímka AB; 2 – úsečka CD; 3 – čtverec; 4 – obdélník; 5 – pravoúhlý trojúhelník; 6 – rovnoramenný trojúhelník; 7 – šestiúhelník; 8 – kružnice; 9 – kruh

3. Zakreslete:
   a) úsečku AB
   b) čtverec ABCD
   c) obdélník ABEF
   d) pravoúhlý trojúhelník CDE
   e) rovnoramenný trojúhelník PQR
   f) kružnici se středem A a poloměrem AB

   Řešení s metodickým komentářem:

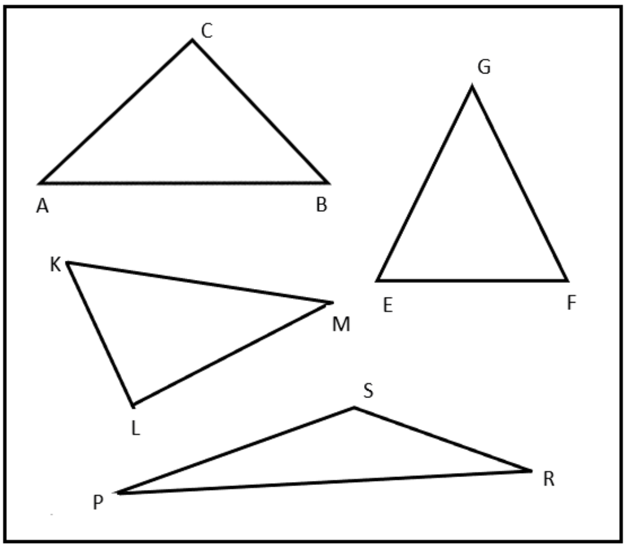
   Žáci za pomoci pravítka a kružítka sestrojí dané útvary. Snaží se dbát na dodržení správného značení bodů. Upevňují si tak mentální spoje mezi pojmy a objekty pomocí využití manipulativních činností. Rozvíjí soustředění a přesnost rýsování a schopnost práce s pomůckami.

4. Je dána úsečka a = 6 cm. Rozhodněte, která z následujících dvojic úseček může s touto úsečkou vytvořit trojúhelník:
   a) b = 8 cm; c = 2 cm
   b) b = 5 cm; c = 12 cm
   c) b = 3 cm; c = 3 cm
   d) b = 7 cm; c = 8 cm

   Řešení s metodickým komentářem:

   a) Žáci si musí uvědomit, že pro všechny strany trojúhelníku musí platit trojúhelníkové nerovnosti typu $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, tedy součet každých dvou stran musí být větší než třetí strana.
   b) $8 + 2 = 10 > 6$, $6 + 2 = 8 = b \Rightarrow$ ne
   c) $5 + 12 = 17 > 6$, $5 + 6 = 11 < 12 \Rightarrow$ ne
   d) $3 + 3 = 6 \Rightarrow$ ne
   e) $7 + 8 = 15 > 6$, $7 + 6 = 13 > 8 \Rightarrow$ ano

5. Jsou dány trojúhelníky ABC, EFG, KLM, PRS. Určete velikost zbývajícího úhlu, jestliže znáte následující velikosti:
   a) úhel CAB má velikost 50°, úhel ABC má velikost 40°
   b) úhel GEC a úhel EFG mají velikost 70°
   c) úhel MKL má velikost 60°, úhel KLM má velikost 80°
   d) úhel SPR má velikost 15°, úhel PRS má velikost 25°



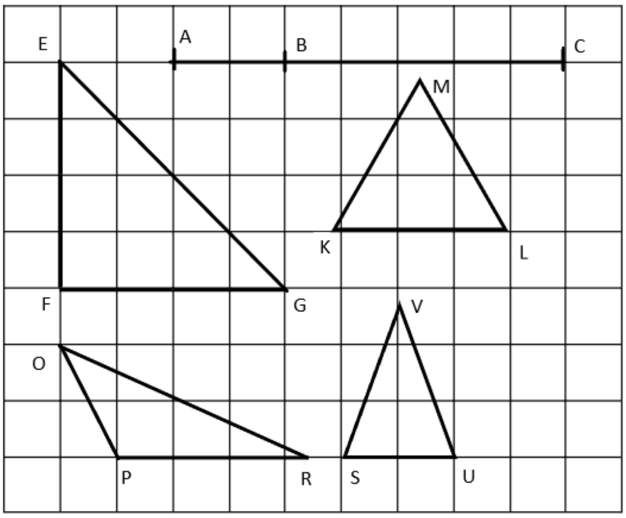
Obrázek 24. Geometrie v rovině – příklad 5 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Úloha ověřuje znalosti o velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Žáci si musí uvědomit, že součet úhlů je 180°.

a) úhel BCA má velikost 90°
b) úhel FGE má velikost 40°
c) úhel LMK má velikost 40°
d) úhel RSP má velikost 140°

6. Ve čtvercové síti o straně 1 dm jsou zobrazeny rovinné útvary:
   a) určete typy úhlů ABC, EFG, KLM, OPR
   b) určete typy trojúhelníků EFG, KLM, OPR a SUV
   c) odhadněte velikost úhlů FGE, KLM, OPR



Obrázek 25. Geometrie v rovině – příklad 6 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci rozeznávají jednotlivé typy úhlů, dokážou je pojmenovat a na základě jejich velikosti pojmenují i jednotlivé typy trojúhelníků. O odhadech velikostí úhlů se mohou přesvědčit měřením úhloměrem.

a) úhel ABC – přímý; úhel EFG – pravý, úhel KLM – ostrý, úhel OPR – tupý
b) trojúhelníky: EFG – pravoúhlý, KLM – rovnostranný, SUV – rovnoramenný, OPR – obecný (tupoúhlý)
c) velikosti úhlů: FGE = 45°, KLM = 60°, VSU ≈ 64°, OPR ≈ 120°

7. Sestrojte:

a) úhel ABC o velikosti 90°
b) úhel DEF o velikosti 60°
c) trojúhelník PQR s vnitřním úhlem o velikosti 45°

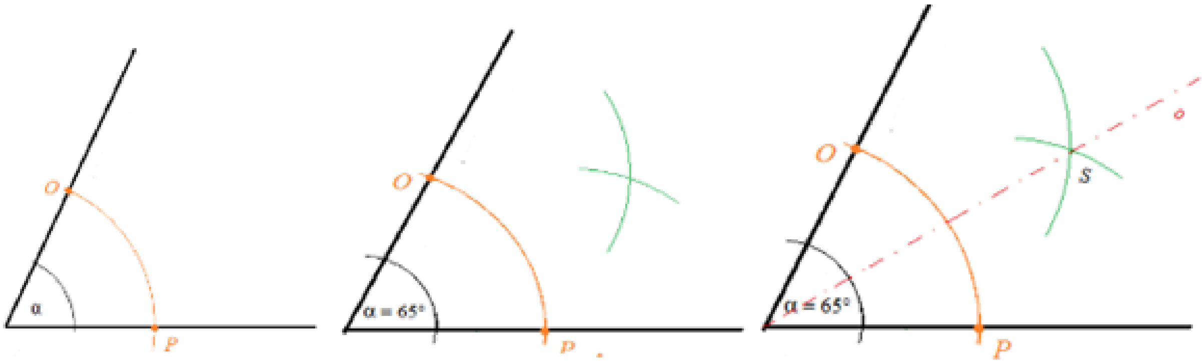
Řešení s metodickým komentářem:

Žáci za pomoci pravítka, úhloměru či kružítka sestrojí dané úhly. Učí se používat pomůcky a upevňují si spoje mezi pojmy, objekty a činnostmi.

8. Sestrojte osu úhlu $\alpha = 65°$.

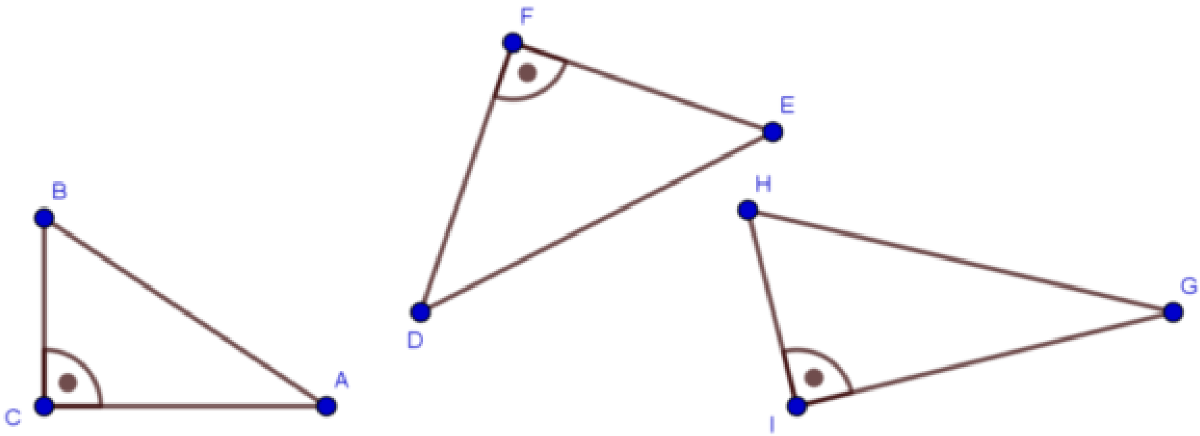
Řešení s metodickým komentářem:

Sestrojit osu úhlu znamená rozdělit úhel na dva stejné úhly. Žáci se musí naučit ovládat tuto základní konstrukci. Nejprve pomocí úhloměru sestrojí úhel, pak libovolný kruhový oblouk k_1 z vrcholu úhlu tak, aby protnul ramena úhlu α. Z průsečíků O, P sestrojí nové kruhové oblouky k_2. Osu úhlu získají, když propojí průsečík kružnic k_2 (bod S) s vrcholem úhlu.



Obrázek 26. Geometrie v rovině – příklad 8 – řešení

9. Zapište Pythagorovu větu pro dané trojúhelníky:



Obrázek 27. Geometrie v rovině – příklad 9 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

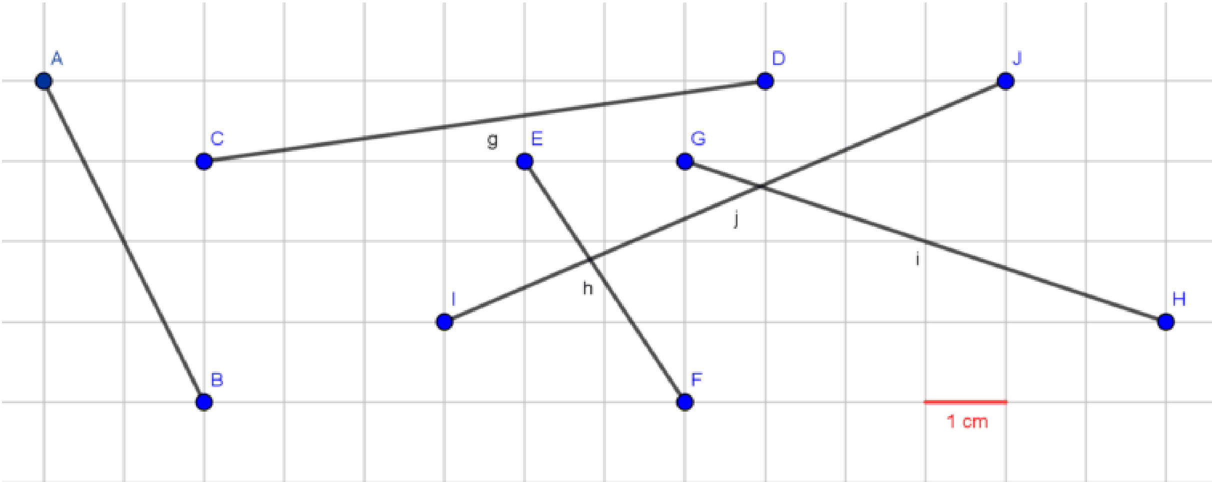
Při řešení úloh na pravoúhlý trojúhelník je třeba, aby žáci pro libovolný pravoúhlý trojúhelník uměli označit odvěsny a přeponu a ovládali Pythagorovu větu: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma jeho odvěsnami. Pro žáky s problémy je vhodnější zjednodušená formulace: Druhá mocnina přepony (nejdelší strany pravoúhlého trojúhelníku) je rovna součtu druhých mocnin obou odvěsen (kratších stran pravoúhlého trojúhelníku).

trojúhelník ABC: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

trojúhelník DEF: $f = \sqrt{d^2 + e^2}$

trojúhelník GHI: $i = \sqrt{g^2 + h^2}$

10. Vypočítejte délky úseček AB, CD, EF, GH, IJ, které jsou zobrazeny ve čtvercové síti o straně čtverce 1 cm.



Obrázek 28. Geometrie v rovině – příklad 10 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Na této úloze si žáci mohou procvičit použití Pythagorovy věty na různých typech pravoúhlých trojúhelníků. Nejprve si ve čtvercové síti vyznačí potřebné trojúhelníky a ze sítě určí délky stran potřebné pro použití Pythagorovy věty.

Trojúhelník s přeponou AB má strany o velikostech 2 cm a 4 cm.

$|AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}47 \text{ cm}$

Trojúhelník s přeponou CD má strany o velikostech 1 cm a 7 cm.

$|CD| = \sqrt{1^2 + 7^2} = 7{,}07 \text{ cm}$

Trojúhelník s přeponou EF má strany o velikostech 2 cm a 3 cm.

$|EF| = \sqrt{2^2 + 3^2} = 3{,}61 \text{ cm}$

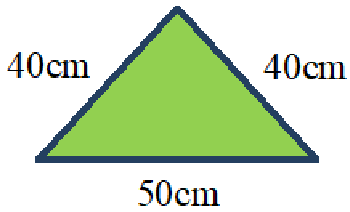
Trojúhelník s přeponou GH má strany o velikostech 2 cm a 6 cm.

$|GH| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6{,}32$ cm

Trojúhelník s přeponou IJ má strany o velikostech 7 cm a 3 cm.

$|IJ| = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7{,}62$ cm

11. Trojúhelníkový šátek má délky stran 50 cm, 40 cm a 40 cm. Jakou délku musí švadlena obšít, má-li obšít celý šátek?



Obrázek 29. Geometrie v rovině – příklad 11 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí přijít na to, že musí sečíst všechny strany trojúhelníku (počítají tedy jeho obvod). V případě znevýhodněných žáků není od věci vystřihnout trojúhelník z papíru a žáci si vyznačí hledanou délku a přeměří ji.

$o = 130$ cm

12. Trojúhelník ABC má obvod 2,5 m. Vypočítejte délku strany c, jestliže víte, že $a = 1{,}2$ m, $b = 8{,}2$ dm.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí vyjít z faktu, že dvě strany rovnoramenného trojúhelníku jsou stejné. Pak dosadit do vzorce pro obvod a vyřešit rovnici. Úlohu řeší za pomocí učitele ve skupinách.

$o = a + b + c$

$b = 8{,}2$ dm $= 0{,}82$ m

$c = o - a - b = 2{,}5 - 1{,}2 - 0{,}82 = 0{,}48$ m $= 4{,}8$ dm

13. Pozemek, který má tvar rovnoramenného trojúhelníku, má obvod $o = 474$ m. Jeho základna je o 48 m delší než rameno. Vypočítejte délky stran tohoto pozemku.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí vyjít z faktu, že dvě strany rovnoramenného trojúhelníku jsou stejné. Pak dosadit do vzorce pro obvod a vyřešit rovnici. Úlohu řeší za pomoci učitele ve skupinách.

$c = b$

$a = b + 48$

$o = a + b + c = b + 48 + b + b = 3b + 48$

$474 = 3b + 48$

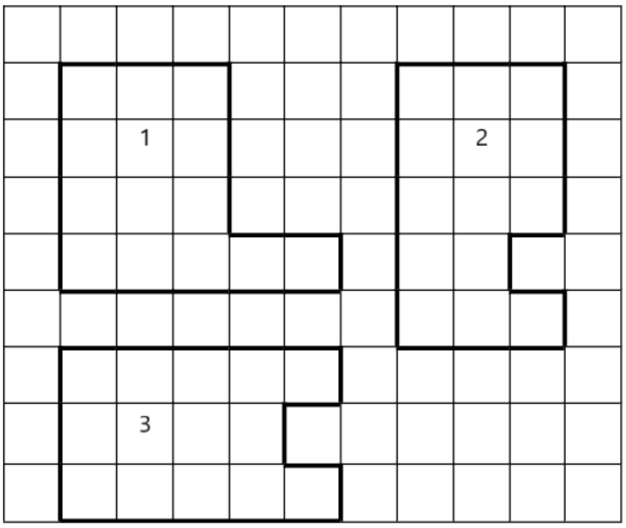
$b = 142$ m

$a = 190$ m

14. Ve čtvercové síti o straně čtverce 1 cm jsou zobrazeny tři útvary. Určete jejich:

a) obvod

b) obsah



Obrázek 30. Geometrie v rovině – příklad 14 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci sčítají délky úseček, určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníků sečtením délek jejich stran. Musí si ujasnit, že jeden čtvereček je jednotka obsahu 1 cm^2 (vhodné zvýraznit – vybarvit), obsah obrazců získáme sečtením jednotek ve čtvercové síti. Užívají základní jednotky délky a obsahu:

a) obvod obrazce 1: $4 + 5 + 1 + 2 + 3 + 3 = 18$, obvod je 18 cm obvod obrazce 2: 5 + 3 + 1 + 1 +1 + 1 + 3 + 3 = 18, obvod je 18 cm

obvod obrazce 3: 3 + 5 +1 + 1+ 1 + 1+ 1 +5 = 18, obvod je 18 cm

b) obsah obrazce 1: 14 cm^2

obsah obrazce 2: 14 cm^2

obsah obrazce 3: 14 cm^2

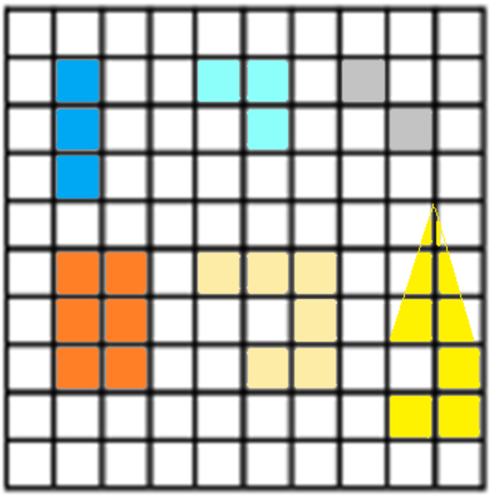
15. Do čtvercové sítě o straně čtverce 1 cm zakreslete útvar, který má:
    a) obvod 8 cm
    b) obsah 6 cm^2

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci zakreslují útvary. Mohou postupovat náhodně či systematicky. Rozvíjejí svou kreativitu, upevní si propojení mezi pojmy obvod a obsah a tvarem útvaru, a výsledky budou odpovídat jejich schopnostem. Každý může být úspěšný.

Je vhodné žáky vést k objevení vlastního systému. Žáci by měli své útvary a postupy prezentovat před ostatními.

Příklady řešení:



Obrázek 31. Geometrie v rovině – příklad 15 – řešení

16. Místnost má tvar obdélníku o stranách 3,2 m a 4 m. Určete minimální počet m^2 dlažby, kterou budete potřebovat na její vydláždění. Balík dlažby obsahuje 1 m^2 dlažby.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci musí vypočítat plochu místnosti: $S = a \cdot b$ = 3,2 m . 4 m = 12,8 m^2

Výsledek zaokrouhlit na celé m^2. Bude potřeba zakoupit minimálně 13 m^2 dlažby.

17. Na pozemku ve tvaru obdélníku o stranách 15 m a 8 m je postavena chata se čtvercovým půdorysem o straně 350 cm. Určete plochu nezastavěné plochy.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci řeší obsahy rovinných obrazců, se kterými se setkávají ve svém okolí. Vhodné je pro každý obrazec použít jiné délkové jednotky, aby si žáci mohli na úloze procvičit i převody jednotek, které jim často činí potíže.

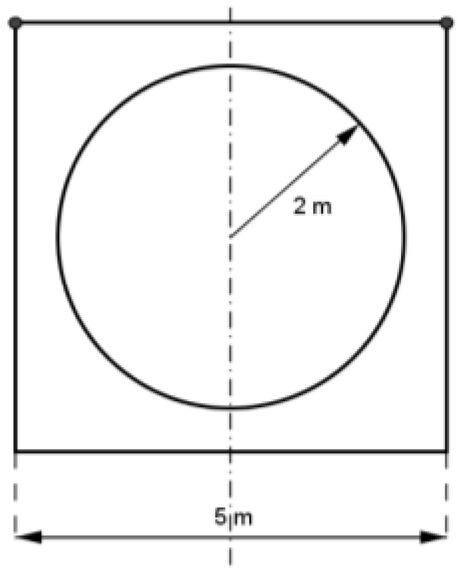
350 cm = 3,5 m

obsah obdélníku: S_1 = 15 m . 8 m = 120 m^2

obsah čtverce: S_2 = (3,5 m)^2 = 212,25 m^2

obsah nezastavěné plochy: $S_1 - S_2$ = 120 m^2 – 12,25 m^2 = 107,75 m^2

18. Zahradník se rozhodl, že uprostřed pozemku ve tvaru čtverce vytyčí kruhový záhon, na kterém vysází okrasné rostliny. Okolí záhonu vysype drtí. Určete obvod čtvercového pozemku, obvod a plochu záhonu a obsah plochy s drtí. Situace je zobrazena na obrázku.



Obrázek 32. Geometrie v rovině – příklad 15 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

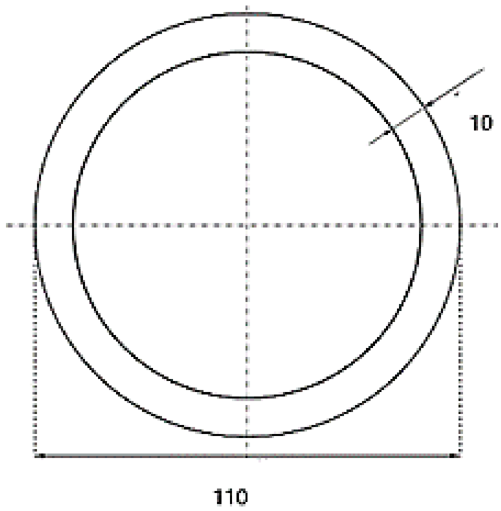
Žáci se musí orientovat ve výkresu. V úloze použijí vzorce pro obvod a obsah čtverce a pro obvod a obsah kruhu.

obvod čtverce: $o = 4 \,.\, 5\text{ m} = 20\text{ m}$ obsah čtverce: $S_1 = (5\text{ m})^2 = 25\text{ m}^2$

obvod kruhu: $o = 2\pi \,.\, 2\text{ m} = 12{,}57\text{ m}$ obsah kruhu: $S_2 = \pi \,.\, (2\text{ m})^2 = 12{,}57\text{ m}^2$

obsah plochy vysypané drtí: $S_1 - S_2 = 25\text{ m}^2 - 12{,}57\text{ m}^2 = 12{,}43\text{ m}^2$

19. Těsnění má vnější průměr 110 mm a tloušťku 10 mm. Vypočítejte plochu těsnění.



Obrázek 33. Geometrie v rovině – příklad 19 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Z obrázku je vidět, že se bude jednat o výpočet obsahu mezikruží. Žáci si společně odvodí ze vzorců pro obsahy obou kružnic vzorec pro výpočet obsahu mezikruží $S = \pi \,.\, (r_1^2 - r_2^2)$.

$r_2 = 110 - 10 = 100$ mm

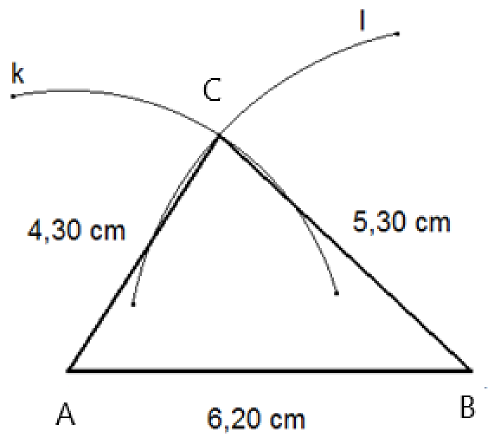
$S = \pi \,.\, (r_1^2 - r_2^2) = \pi \,.\, [(110\text{ mm})^2 - (100\text{ mm})^2] = 6\,597{,}3446\text{ mm}^2 = 6{,}6\text{ cm}^2$

Plocha těsnění je 6,6 cm^2.

20. Narýsujte trojúhelník ABC se stranami a = 5,3 cm, b = 4,3 cm, c = 6,2 cm.

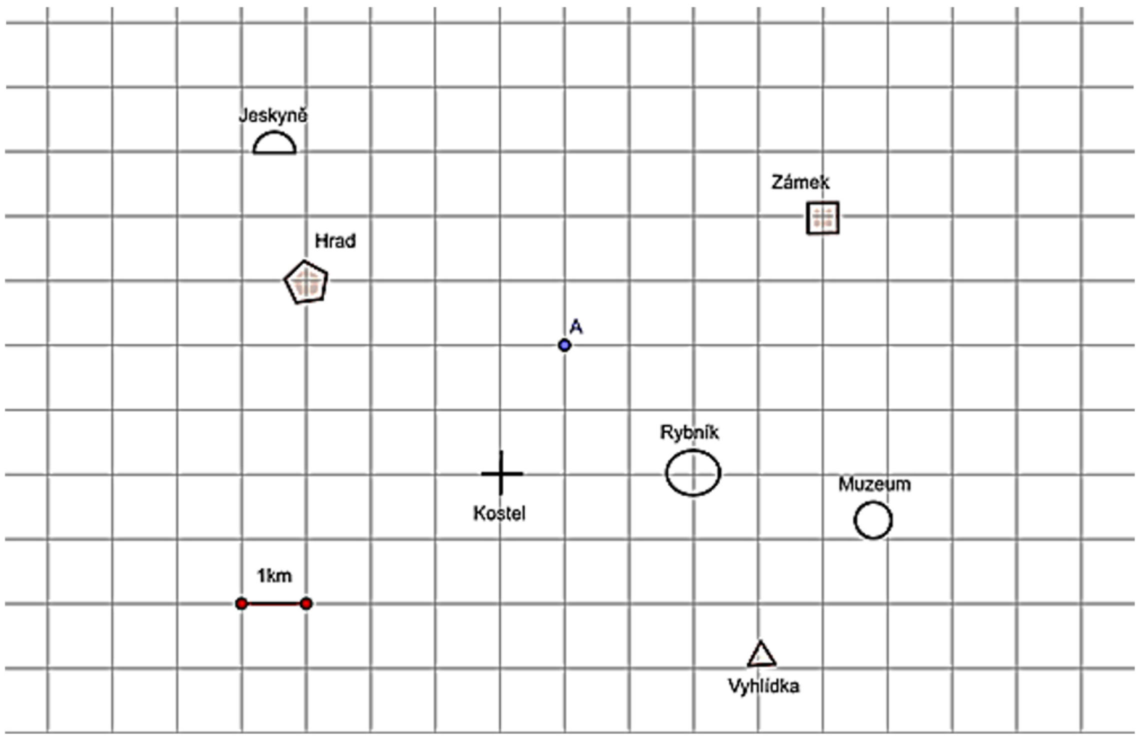
Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se v této úloze seznámí se základní konstrukcí trojúhelníku. Nejprve umístí stranu c a potom z vrcholu A sestrojí kružnici k o poloměru b a z vrcholu B kružnici l o poloměru *a*. Průsečík kružnic *k* a *l* je vrchol C. Před vlastní konstrukcí si ověří, zda strany *a*, *b*, *c* splňují trojúhelníkovou nerovnost.



Obrázek 34. Geometrie v rovině – příklad 20 – řešení

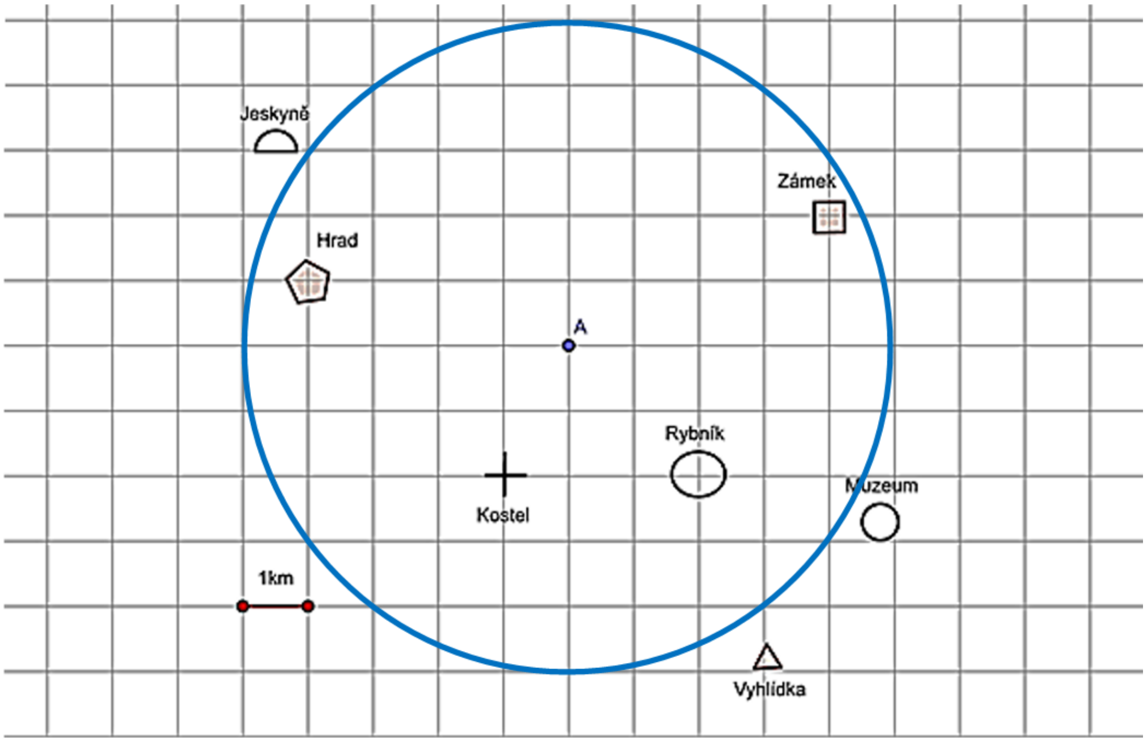
21. Na mapě je znázorněno několik památek. Jste-li v hotelu v bodě A, jaké památky můžete navštívit, jestliže nechcete cestou tam a zpět urazit víc než 10 km.



Obrázek 35. Geometrie v rovině – příklad 21 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

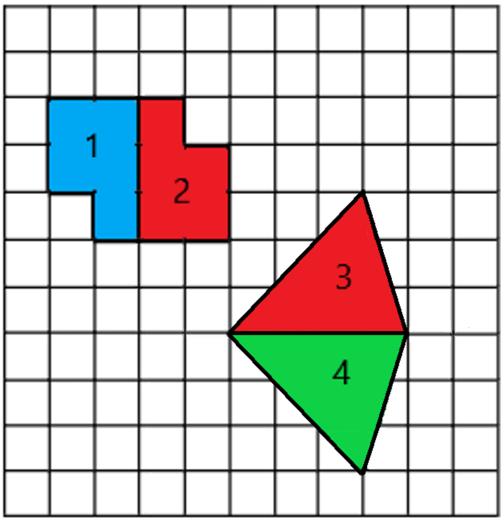
Je vhodné nechat žáky pracovat ve skupinkách. Hledáme památky, které jsou do vzdálenosti 5 km, tedy v kruhu o poloměru 5 jednotek.



Obrázek 36. Geometrie v rovině – příklad 21 – řešení

Je možné navštívit jednu z těchto památek: Hrad, Kostel, Rybník a Zámek, protože jsou v menší vzdálenosti než 5 km od hotelu A. Nebo je možné navštívit Kostel i Rybník, protože obvod trojúhelníku vymezeného objekty hotel A, Kostel a Rybník je menší než 10 km.

22. Rozhodněte, zda jsou útvary na obrázku shodné:

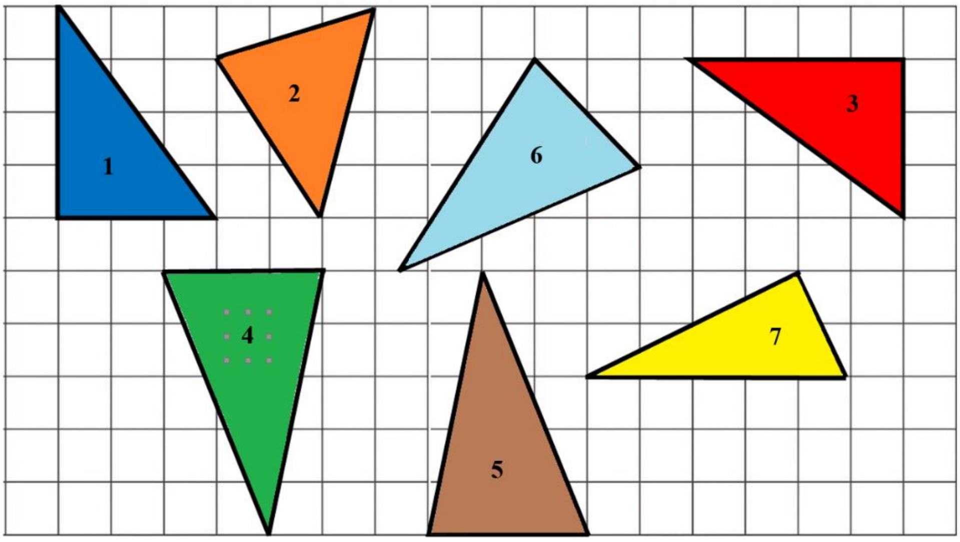


Obrázek 37. Geometrie v rovině – příklad 22 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se musí orientovat ve čtvercové síti a porovnat zobrazené obrazce. Měli by společně určit, zda jsou obrazce shodné nebo ne a proč. Obrazce 1 a 2 jsou shodné, mají stejný obsah. Trojúhelníky 3 a 4 jsou shodné podle osy souměrnosti, mají stejný obsah. O shodnosti se přesvědčíme, když si obrazce vystřihneme a převrátíme.

23. Rozhodněte, jestli mezi zobrazenými trojúhelníky existují dvojice shodných trojúhelníků.



Obrázek 38. Geometrie v rovině – příklad 23 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Je třeba, aby žáci z obrázku odhadli délky stran a úhlu a vyslovili vlastní závěry.

Mezi trojúhelníky existují dvě dvojice shodných trojúhelníků: 1 a 3, 4 a 5.

24. Převeďte na uvedené jednotky:

a) 3,25 m na dm, cm, mm

b) 2,8 km na m, dm

c) 156 cm na m, dm, mm

d) 27 dm na m, cm, mm

e) 1 200 mm na cm, dm, m

Řešení s metodickým komentářem:

Pro řešení úloh z geometrie je důležité, aby žáci uměli převádět jednotky délky. Převody pro mm, cm a m je vhodné ukázat na konkrétním příkladu – metru.

1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm

a) 3,25 m = 32,5 dm = 325 cm = 3 250 mm

b) 2,8 km = 2 800 m = 28 000 dm

c) 156 cm = 1,56 m = 15,6 dm = 1 560 mm

d) 27 dm = 2,7 m = 270 cm = 2 700 mm

e) 1 200 mm = 120 cm = 12 dm = 1,2 m

25. Převeďte na uvedené jednotky:

a) 1 200 mm^2 na cm^2, dm^2, m^2

b) 25 000 cm^2 na dm^2, m^2, a

c) 350 000 dm^2 na m^2, a, ha

d) 2 600 m^2 na a, ha

Řešení s metodickým komentářem:

Pro výpočet obsahů je nutné, aby žáci zvládli převody jednotek obsahu. Je vhodné ukázat vztah mezi plošnými jednotkami na konkrétním příkladu, např. 1 m^2 = 10 dm . 10 dm.

a) 1 200 mm^2 = 12 cm^2 = 0,12 dm^2 = 0,0012 m^2

b) 25 000 cm^2 = 250 dm^2 = 2,5 m^2 = 0,025 a

c) 350 000 dm^2 = 3 500 m^2 = 35 a = 0,35 ha

d) 2 600 m^2 = 26 a = 0,26 ha

6.4 Geometrie v prostoru

V rámci geometrie v prostoru se žáci učí poznat a popsat vzájemné polohy objektů/těles v prostoru, učí se je porovnávat, odhadovat, měřit délky, velikosti úhlů, povrch a objem těles, zdokonalovat svůj grafický projev ve třech úrovních:

1) Správné změření a popis délek, vzdáleností a úhlů v objektech/tělesech včetně správného použití jednotek. Rozeznání shodných a podobných těles.
2) Náčrtek jednoduchých těles nebo jejich sítě dle zadání rozměrů a tvaru. Výpočet povrchu a objemu jednoduchých těles s použitím digitální techniky (vzorce, výpočty).
3) Náčrt a konstrukce jednoduchých těles dle zadání rozměrů a tvaru a v zadaném měřítku. Odhad a výpočet objemu a povrchu jednoduchých těles s využitím převodu jednotek, Pythagorovy věty a digitální techniky.

Úspěšné zvládnutí úloh je významně závislé na intelektových předpokladech žáka a úroveň zvládnutí očekávaných výsledků učení bude tedy v oborech E diferencovaná. Je třeba nastavit úroveň nároků na žáka tak, aby byly motivující a rozvíjely intelektové schopnosti žáka, ale nebyly přemrštěné a nezpůsobovaly demotivaci žáka.

6.5 Očekávané výsledky učení

Při řešení úloh z jejich běžného života nebo oboru vzdělání žáci:

- porozumí textu jednoduché úlohy a vyřeší ji známými postupy;
- kontrolují výsledek z hlediska početního postupu i věcného významu výsledku;
- zformulují odpověď k získanému výsledku;
- vytvoří jednoduchou slovní úlohu dle vzoru.

Přitom:

1) Žáci určují a charakterizují základní prostorové útvary (tělesa) a analyzují jejich vlastnosti:
   - rozpoznávají mnohostěny (krychle, kvádr, *kolmý hranol, jehlan*) a rotační tělesa (válec, kužel, koule);
   - používají pojmy podstava, hrana, stěna, vrchol, *tělesová a stěnová úhlopříčka*;
   - užívají základní prostorové charakteristiky těles při řešení prostorových problémů.

2) Žáci načrtnou a sestrojí sítě jednoduchých těles:
   - používají pojmy síť tělesa, plášť, podstava;
   - rozpoznají sítě základních těles (krychle, kvádr, *kolmý hranol, jehlan,* válec, *kužel*);
   - načrtnou a sestrojí síť krychle a kvádru.

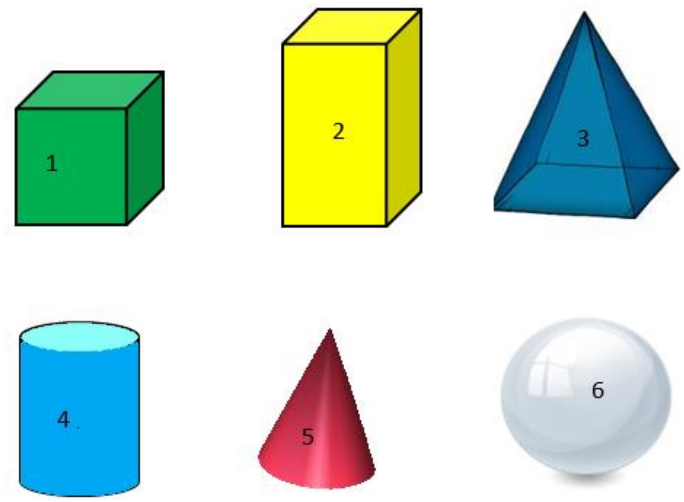
3) Žáci odhadují a vypočítají objem a povrch tělesa:
   - odhadují a vypočítají povrch a objem krychle, kvádru a válce;
   - používají a převádějí jednotky objemu.

6.6 Ukázkové úlohy

1. Na konkrétním mnohostěnu změřte jeho rozměry. Kolik těchto těles potřebujete, chcete-li je naskládat na sebe do výšky 1 m?

   Řešení s metodickým komentářem:
   Žáci přeměří pravítkem rozměry mnohostěnu – např. guma, učebnice, mobilní telefon apod. Při tom diskutují jejich tvar (odlišnost od ideálního tvaru – např. zaoblené rohy), které rozměry jsou důležité a vhodné ke změření, jakým způsobem realizují a určí počty mnohostěnů v 1 metru.

2. Uveďte názvy těles, která jsou na obrázku. Rozhlédněte se po svém okolí a řekněte, jestli se v něm některé z těles vyskytuje.



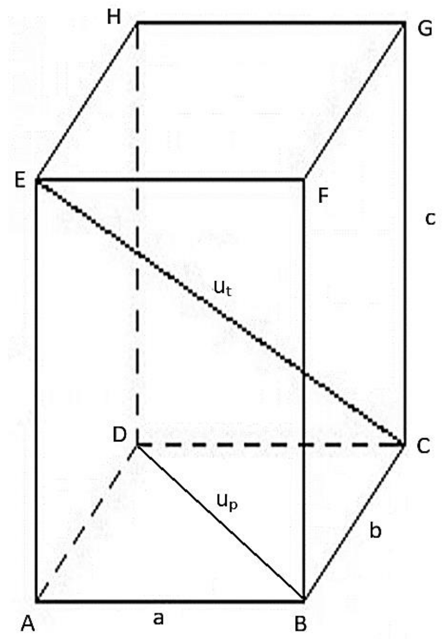
Obrázek 39. Geometrie v prostoru – příklad 2 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci rozpoznají základní tělesa a hledají ve svém okolí, jejich obdobu.

1 – krychle, 2 – kvádr, 3 – jehlan, 4 – válec, 5 – kužel, 6 – koule

3. Pojmenujte těleso na obrázku a určete jeho vrcholy, hrany, podstavy, stěny, stěnové a tělesové úhlopříčky. Sestrojte úhlopříčku stěny BCGF, úhlopříčku horní podstavy a určete:
   a) alespoň dvě hrany, které jsou navzájem kolmé
   b) alespoň dvě hrany, které jsou navzájem rovnoběžné
   c) alespoň dvě hrany, které jsou mimoběžné



Obrázek 40. Geometrie v prostoru – příklad 3 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci si pozorně prohlédnou obrázek a splní požadované úkoly. V případě potřeby lze využít drátěný model.

Kvádr s vrcholy ABCDEFGH má hrany AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE, stěnové úhlopříčky AF, BE, BG, CF, CH, DG, AH, DE, úhlopříčky dolní podstavy AC a BD, úhlopříčky horní podstavy EG, FH, tělesové úhlopříčky AG, BH, CE a DF.

a) kolmé hrany AB a AE, AB a BC, BF a BC, BC a CG, CD a CG, …

b) rovnoběžné hrany AB a DC, AB a EF, AB a HG, AD a BC, AD a FG, AD a EH

c) mimoběžné hrany AB a FG, BC a EF, CD a EH, …

4. V místnosti o výšce stropu 3,1 m máme na stůl o výšce 0,75 m umístit vánoční stromek. Jak vysoký stromek můžete koupit, jestliže podstavec a ozdobná špice zvětší výšku stromku o 20 cm?

   Řešení s metodickým komentářem:

   Úloha, pro většinu běžných žáků jednoduchá, může některým žákům dělat problémy. Pokud má žák problém si reálnou situaci představit, je třeba ji nebo podobnou situaci realizovat.

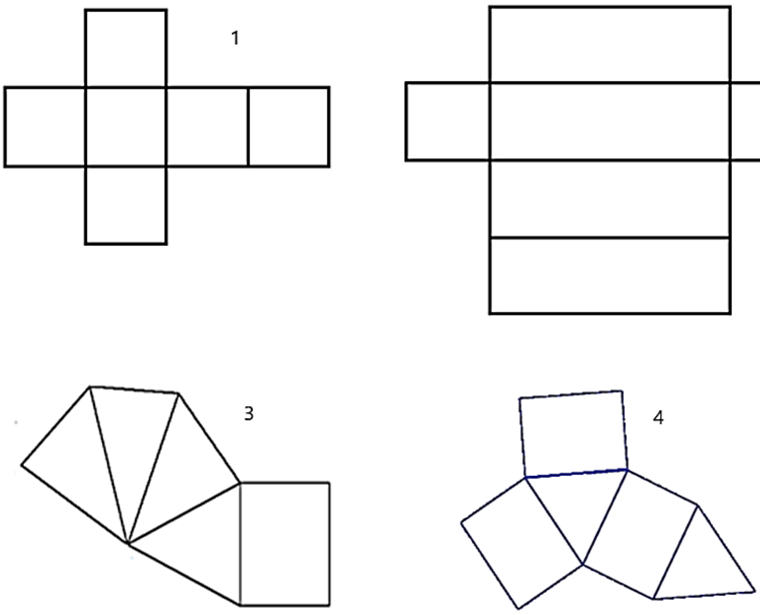
   Žáci musí pochopit, že na stromek mají nad stolem 3,1 m – 0,75 m = 2,35 m místa, takže stromek může být vysoký 235 cm – 20 cm = 215 cm.

5. Cukrářka má rozříznout válec dortu o výšce 6 cm na tři vodorovné pláty a promazat je centimetrovou vrstvou krému. Jak vysoký bude dort?

   Řešení s metodickým komentářem:

   Je nutné, aby si žáci uvědomili podstatu úlohy, tedy dort rozřízneme dvěma řezy na tři pláty o tloušťce například 2 cm a mezi ně budou vloženy dvě vrstvy krému o tloušťce 1 cm. Tedy celková výška dortu bude 6 cm + 2 cm = 8 cm.

6. Určete, kterým tělesům odpovídají sítě na obrázku. Zkuste si daná tělesa načrtnout buď od ruky, nebo pomocí vhodného softwaru.



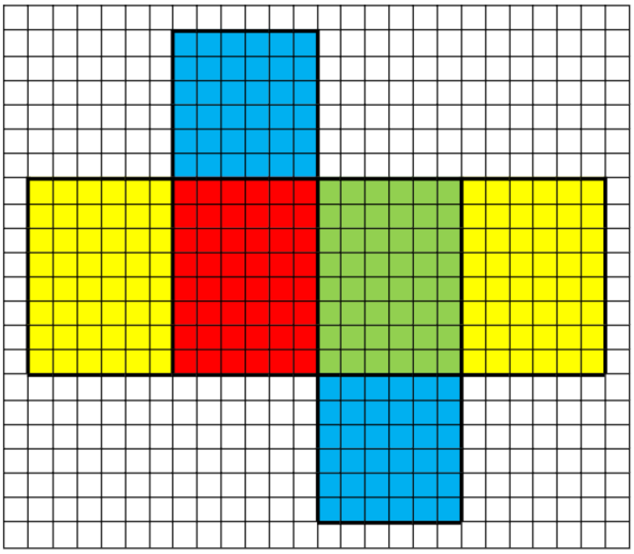
Obrázek 41. Geometrie v prostoru – příklad 6 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Práce se sítěmi pomáhá žákům uvědomit si, že si pomocí sítí mohou udělat představu o podobě příslušného tělesa a těleso i případně vyrobit. Je důležité, aby žáci našli příklady z praxe, kde se se sítěmi setkají (střihy šatů, příprava výrobků z plechu). Žáci by si měli sami zvolit velikost jednotlivých stran a daná tělesa si nejen načrtnout a sestrojit, ale mohou si udělat i prostorové modely. (Nesmí však zapomenout na přesahy, aby mohli tělesa slepovat.)

1 – krychle, 2 – čtyřboký hranol, 3 – pravidelný čtyřboký jehlan, 4 – trojboký hranol

7. Na obrázku je síť tělesa. Určete obsahy bočních stěn, podstav, povrch a objem tělesa, je-li délka čtverečku 1 cm.



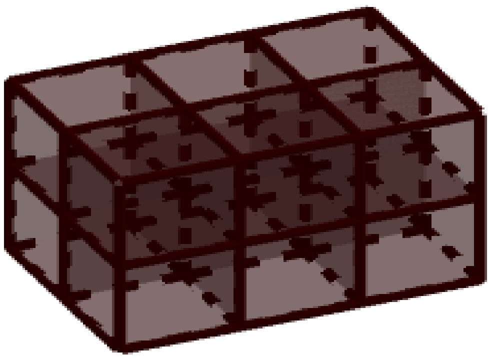
Obrázek 42. Geometrie v prostoru – příklad 7 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Ze sítě vidíme vztah mezi rozměry tělesa a velikostí povrchu kvádru.

obsah každé boční stěny:	6 cm . 8 cm = 48 cm^2
obsah každé podstavy:	6 cm . 6 cm = 36 cm^2
povrch tělesa:	4 . 48 cm^2 + 2 . 36 cm^2 = 264 cm^2
objem tělesa:	6 cm . 6 cm . 8 cm = 288 cm^3

8. Určete, kolik krychlových krabic se zbožím o rozměrech hrany 1 m se nachází v přepravním prostoru dodávky ve tvaru kvádru na obrázku?



Obrázek 43. Geometrie v prostoru – příklad 8 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Je třeba žáky upozornit na vztah mezi objemem kvádru a rozměry jeho hran.

Na obrázku vidíme 3 krychle v první řadě, 2 . 3 krychlí ve spodní vrstvě a v obou vrstvách 3 . 2 . 2 krychlí v celém kvádru. Kvádr obsahuje 12 krychlí (krabic), což znamená, že objem kvádru (přepravního prostoru) je 12 m^3.

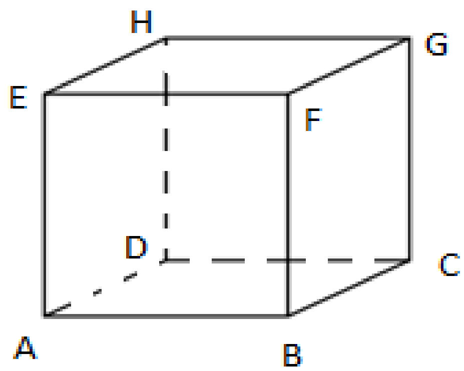
9. Z dřevěného pravidelného čtyřbokého hranolu s podstavnou hranou 6 cm a výškou 30 cm, byly odřezány tři kostky o hraně 6 cm. Určete povrch a objem hranolu, navrhněte polohu řezů, povrch a objem jedné kostky a tvar i objem zbytku hranolu.

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci se s krychlí a hranolem setkávají velice často. Musí si uvědomit jednotlivé prvky obou těles a umět aplikovat vzorce pro povrch a objem a ovládat převody jednotek.

objem hranolu:	$V_1 = a^2 \,.\, v = (6\text{ cm})^2 .\, 30\text{ cm} = 1\,080\text{ cm}^3$
povrch hranolu:	$S_1 = 2 \,.\, a^2 + 4 \,.\, a \,.\, v = 2 \,.\, (6\text{ cm})^2 + 4 \,.\, 6\text{ cm} \,.\, 30\text{ cm} = 792\text{ cm}^2$
objem krychle:	$V_2 = a^3 = (6\text{ cm})^3 = 216\text{ cm}^3$
povrch krychle:	$S_2 = 6 \,.\, a^2 = 6 \,.\, (6\text{ cm})^2 = 216\text{ cm}^2$
objem zbytku (hranol):	$V = V_1 - 2 \,.\, V_2 = 1\,080\text{ cm}^3 - 2 \,.\, 216\text{ cm}^3 = 648\text{ cm}^3$

10. Akvárium má tvar krychle o hraně a = 50 cm. Vypočítejte jeho povrch a určete, kolik litrů vody se do akvária vejde. Diskutujte, o jaké rozměry akvária se zřejmě jedná.



Obrázek 44. Geometrie v prostoru – příklad 10 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci aplikují poznatky o povrchu a objemu krychle na řešení úloh z každodenního života. V tomto případě si musí uvědomit, že se jedná o dutou krychli, která nemá horní podstavu. Nejprve by měli zkusit odhadnout objem a povrch a teprve potom pomocí vzorců povrch a objem vypočítat.

$S = 5 \,.\, a^2 = 5 \,.\, 50^2 = 12\,500 \text{ cm}^2 = 125 \text{ dm}^2$

$V = a^3 = 50^3 = 125\,000 \text{ cm}^3 = 125 \text{ dm}^3 = 125 \text{ l}$

Akvárium má povrch 125 dm^2 a vejde se do něho 125 l vody.

11. Požární nádrž má délku 15 m, šířku 5 m a hloubku 2,5 m.
    a) Určete, kolik hl vody v ní je, jestliže voda sahá 30 cm pod okraj nádrže.
    b) Určete, kolik barvy budou potřebovat k natření nádrže, jestliže na 42 m^2 je potřeba 7,5 l barvy.
    c) Určete, kolik plechovek barvy potřebují, jestliže v jedné plechovce je 5 l barvy.

Řešení s metodickým komentářem:

V této úloze žáci aplikují poznatky o kvádru k řešení úlohy z běžného života. Musí ovládat vzorce pro objem a povrch a převody jednotek.

a) Výška vody: $v' = 2{,}2$ m

Objem vody: $V = a \,.\, b \,.\, v' = 15 \text{ m} \,.\, 5 \text{ m} \,.\, 2{,}2 \text{ m} = 165 \text{ m}^3 = 1\,650 \text{ hl}$

b) Natírají se pouze podstava a stěny nádrže:

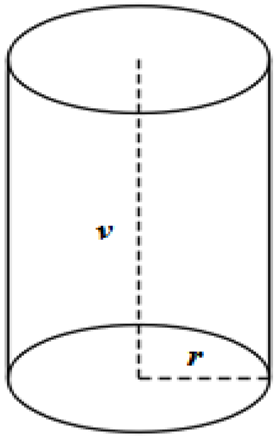
$S = a \,.\, b + 2 \,.\, (a \,.\, v + b \,.\, v)$

$S = 15 \text{ m} \,.\, 5 \text{ m} + 2 \,.\, (15 \text{ m} \,.\, 2{,}5 \text{ m} + 5 \text{ m} \,.\, 2{,}5 \text{ m}) = 175 \text{ m}^2$

$175 : 42 = 4{,}16;\ 4{,}16 \,.\, 7{,}5 = 31{,}2 \text{ l} \Rightarrow$ Na nátěr bude potřeba 31,2 l barvy.

c) $31{,}2 : 5 = 6{,}3 \Rightarrow$ Potřebují 7 plechovek barvy.

12. Určete povrch a objem válce o poloměru $r = 5$ cm a výšce $v = 50$ cm.



Obrázek 45. Geometrie v prostoru – příklad 12 – zadání

Řešení s metodickým komentářem:

Válec je další těleso, se kterým se žáci setkávají ve svém okolí. Využijí jeho základní vlastnosti a použijí vzorce pro povrch a objem.

Povrch: $S = 2 \,.\, \pi \,.\, r^2 + 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, \mathrm{v} = 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, (r + v) = 2 \,.\, \pi \,.\, 5 \,.\, (5 + 50) = 1\,727{,}88\ \mathrm{cm}^2$

Objem: $\mathrm{V} = \pi^2 \,.\, \mathrm{V} = \pi \,.\, 5^2 \,.\, 50 = 3\,927\ \mathrm{cm}^3$

13. Kuchařka polila dort o průměru 30 cm a výšce 10 cm čokoládovou polevou. Jak velká je plocha dortu politá čokoládou?

Řešení s metodickým komentářem:

Žáci při řešení této úlohy musí poznat, že kuchařka bude polévat pouze horní podstavu válce a plášť.

$\mathrm{r} = \frac{1}{2}\mathrm{d} = \frac{1}{2} \,.\, 15\ \mathrm{cm} = 7{,}5\ \mathrm{cm}$

politá plocha:

$S = \pi \,.\, r^2 + 2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, \mathrm{v} = \pi \,.\, r \,.\, (r + 2 \,.\, v) = \pi \,.\, 7{,}5\ \mathrm{cm} \,.\, (7{,}5\ \mathrm{cm} + 20\ \mathrm{cm}) = 647{,}95\ \mathrm{cm}^2$

14. Převeďte na uvedené jednotky:

a) $15\,000\ \mathrm{mm}^3$ na cm^3, dm^3

b) $32\,000\ \mathrm{cm}^3$ na dm^3, m^3, hl

c) $745\ \mathrm{dm}^3$ na cm^3, m^3, hl

d) $370\ \mathrm{m}^3$ na cm^3, dm^3, l, hl

Řešení s metodickým komentářem:

Pro výpočty objemů je nutné, aby žáci zvládli převody jednotek, v ideálním stavu jim i porozuměli. Žáci by si měli osvojit vztah mezi objemovými jednotkami.

$1 dm^3 = 10\ cm\ .\ 10\ cm\ .\ 10\ cm = 1000\ cm^3$ apod.

a) $15\ 000\ mm^3 = 15\ cm^3 = 0{,}015\ dm^3$

b) $32\ 000\ cm^3 = 32\ dm^3 = 0{,}032\ m^3 = 0{,}32\ hl$

c) $745\ dm^3 = 745\ 000\ cm^3 = 0{,}745\ m^3 = 7{,}45\ hl$

d) $740\ m^3 = 740\ 000\ 000\ cm^3 = 740\ 000\ dm^3 = 740\ 000\ l = 74\ 000\ hl$

7 Seznam tabulek, grafů a obrázků

7.1 Seznam tabulek

7.2 Seznam grafů

7.3 Seznam obrázků

8 Použité zdroje

8.1 Tištěné dokumenty

[1] *Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace, skupina pro přípravu standardů vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace*. NÚV, 2013.

[2] ZELENDOVÁ, Eva, FUCHS, Eduard a kol. *Metodické komentáře k oboru Matematika a její aplikace*. NÚV, 2013.

[3] FUCHS, Eduard, BINTEROVÁ, Helena a kol. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště*. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 800-7196-294-5.

[4] KEBLOVÁ, Alena, VOLKOVÁ, Jana. *Matematika pro 1. až 3. ročník odborných učilišť. Aritmetika, Algebra*. Praha: Septima, 2002. ISBN 80-7216-170-9.

[5] KEBLOVÁ, Alena, VOLKOVÁ, Jana. *Matematika pro 1. až 3. ročník odborných učilišť. Geometrie*. Praha: Septima, 2017. ISBN 978-80-7216-343-4.

[6] CALDA, Emil. *Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU. 1. díl*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-367-7.

[7] CALDA, Emil. *Matematika pro dvouleté a tříleté učební obory SOU. 2. díl*. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-260-1.

[8] BARTOŠEK, M., PROCHÁZKA, F., STANĚK, M., BOBKOVÁ, Z. *Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory se strojírenským základem*. NÚV, 2018.

[9] HUDCOVÁ, M., KUBIČÍKOVÁ, L. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. Praha: Prometheus, 2000. ISBN: 978-80-7196-318-9.

[10] HOŠPESOVÁ, A., DIVÍŠEK, J., KUŘINA, F. *Matematika pro 5. ročník základní školy – Svět čísel a tvarů*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-192-5.

[11] ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 6, 1. a 2. díl*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-373-8 a ISBN 978-80-7196-456-8.

[12] ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 7, 1. a 2. díl*. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 80-7196-085-3 a ISBN 80-7196-106-X.

8.2 Elektronické dokumenty

[13] Generátor citací. *Citace.com* [online]. 2012 [cit. 2013-01-02]. Dostupné z: http://generator.citace.com/

Národní pedagogický institut České republiky
Projekt Modernizace odborného vzdělávání (MOV)
Senovážné nám. 872/25, 110 00 Praha 1
www.projektmov.cz