Digitalizace ve vzdělávání
Národní pedagogický institut ČR

Rozvoj digitálních kompetencí v matematice

Metodická příručka pro středoškolské učitele

Eva Zelendová

Financováno Evropskou unií
NextGenerationEU
NÁRODNÍ PLÁN OBNOVY
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Žádná část tohoto díla s výjimkou záznamových a vyhodnocovacích archů nesmí být rozmnožována, ukládána ani přenášena elektronickými, mechanickými, kopírovacími, filmovacími, záznamovými či jinými prostředky bez písemného povolení vydavatele.

Pokud jsou v publikaci používány pojmy učitel, rodič aj., rozumí se tím pedagogická kategorie nebo označení skupiny. Přes volbu mužského rodu text respektuje rovnost pohlaví.

© Národní pedagogický institut České republiky, Praha, 2025

ISBN 978-80-7578-161-1

Obsah

Úvod 5

1. Počítáme s čísly a proměnnými 6

1.1 Sčítej, odčítej, násob 7

1.2 Sedmé nebe 9

1.3 Tabulka jako důkaz 11

2. Geometrická představivost 14

2.1 Kruh, Kroužek, Kolo, Kolečko 15

2.2 Kruh, Kroužek… pro náročné 17

2.3 Nakresli mi srdce 19

2.4 Galerie pro matematiky 22

3. Objevování zákonitostí 24

3.1 Shut the Box 25

3.2 Odhad čísla π 27

3.3 Číslo π ukryté v Pascalově trojúhelníku 30

4. Informace a jejich posouzení 33

4.1 Hra IOTA 34

4.2 On the Road 36

4.3 Realitní agent 39

5. Modelování reálných situací 42

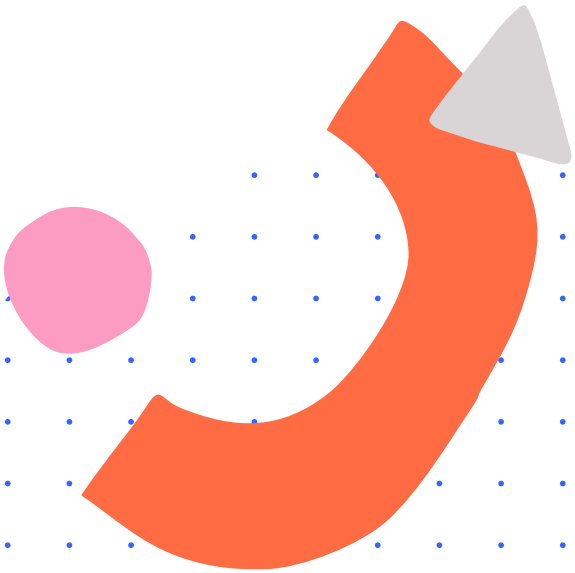
5.1 Nákupní vozíky 43

5.2 Poznáš značku auta podle loga 45

5.3 Pět jezer a jeden lom 48

Využité zdroje 51

Úvod



Digitální dovednosti se staly nedílnou součástí života. Využívají je ve svém zaměstnání pracovníci všech možných institucí: lékaři i projektanti, pracovníci bank i učitelé, prodavači v obchodech i meteorologové. Každý z nás se v mobilu dívá na předpověď počasí, hledá trasu výletu, komunikuje s okolím, aniž bychom si uvědomovali, kolik matematiky je v těchto aplikacích ukryto.

V současné době je proto nezbytné, aby škola umožnila rozvíjet digitální kompetence studentů nejen v hodinách informatiky. V této metodické příručce naleznete náměty na rozvoj digitálních dovedností žáků v hodinách matematiky. Některé z předkládaných úloh by se jistě daly vyřešit i bez počítače. Při využití informačních technologií se však naučíte postupy, které umožní řešit podobné, ale mnohem náročnější problémy.

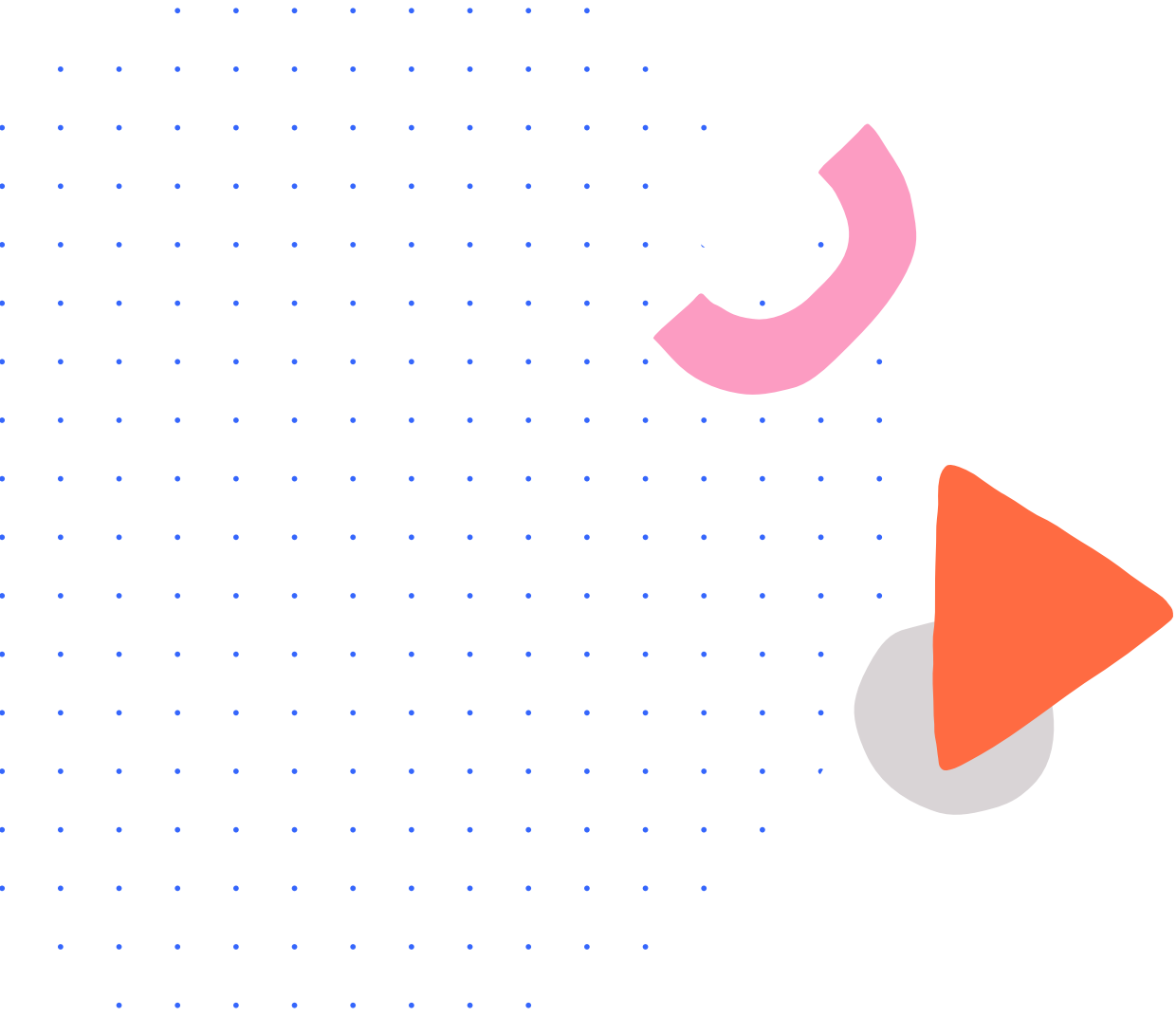
Vzhledem k tomu, že existuje velké množství programů, které umí kreslit obrázky a schémata, zpracovávat číselná data pomocí výpočtů nebo grafů a prezentovat získané informace, byly pro realizaci úloh vybrány bezplatně dostupné aplikace Mapy.cz a GeoGebra, dále pak programy Word a Excel a PowerPoint. Úlohy lze samozřejmě uvedenými postupy řešit i v jiných odpovídajících programech.

Pro řešení úloh je třeba mít některé základní digitální dovednosti. Mezi ně například patří otevření a uložení souboru, povědomí o rozložení tlačítek na klávesnici, ovládání kurzoru a základní orientace v prostředí výše uvedených programů. Jelikož se jedná o programy uživatelsky příjemné, s trochou trpělivosti (a někdy třeba i metodou pokus-omyl) lze tyto dovednosti zvládnout.

Pro snadnou přípravu výukové situace jsou k metodické příručce připraveny soubory s ukázkami možných řešení.

1.

Počítáme s čísly a proměnnými



OBSAH KAPITOLY

Po prostudování kapitoly *Počítáme s čísly a proměnnými* byste měli umět rozvíjet následující digitální dovednosti:

- základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami)
- využívání logické funkce KDYŽ
- nastavení formátu buňky (číslo a text) a podmíněného formátování buňky a řádku
- zápis vzorců pomocí absolutního i relativního adresování
- využití funkce POWER, ČÁST, COUNTIF, ABS, ČÁST
- ukotvení příček
- spojování řetězců znaků

Uvedené digitální dovednosti budou využity v následujících matematických tématech:

- početní operace s čísly i proměnnými
- číselné množiny

AKTIVITY PRO ROZVOJ UVEDENÝCH DOVEDNOSTÍ

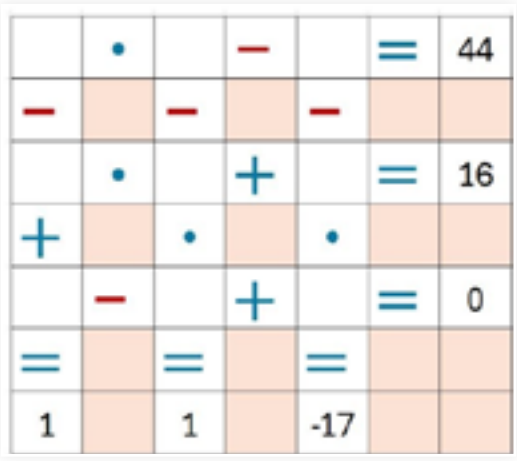
1.1 Sčítej, odčítej, násob

Tematický okruh: početní operace

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami), logická funkce

Připravené soubory: *1_1_Scitej_odcitej_nasob_Tab, 1_1_Scitej_odcitej_nasob_Res*



Zadání aktivity

Martin našel na netu tuto početní úlohu:

Doplňte do prázdných nevybarvených políček celá čísla od 1 do 9 tak, aby byly splněny dané číselné rovnosti. V každém nevybarveném políčku musí být jen jedno číslo nebo matematický symbol a žádné číslo se nesmí opakovat (viz obrázek vlevo).

Rozhodl se, že si připraví pro pohodlnější řešení tabulku, která bude po zápisu čísel do řádku nebo sloupce „sama kontrolovat“, zda je požadovaná číselná rovnost splněna.

Úkol 1

Připravte si tabulku pro zadávání čísel. Do žlutě vybarvených buněk zapište vzorce, které budou pro kontrolu počítat hodnoty odpovídajících číselných výrazů.

Úkol 2

Do zeleně vybarvených buněk zapište tzv. logické funkce, které v případě, že se kontrolní hodnota číselného výrazu bude rovnat hodnotě uvedené v tabulce, zapíší červeně a tučně ANO. Když vypočtená hodnota číselného výrazu nebude odpovídat uvedené hodnotě v tabulce, objeví se červeně a tučně zapsané tři vykřičníky.

V tabulkách můžeme využít tzv. logickou funkci. V našem případě pro buňku K2 jde o zápis =KDYŽ (H2=J2;”ANO”;”!!!”). Takto zapsaná funkce provede následující příkazy: když je číslo v buňce H2 rovno číslu v buňce J2, objeví se ANO v té buňce, ve které je logická funkce zapsána. V opačném případě se zde objeví tři vykřičníky.

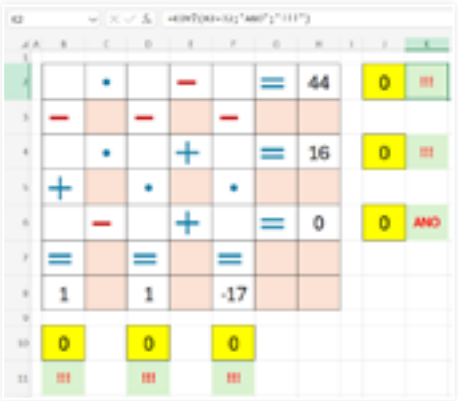
Úkol 3

Do připravené tabulky zapište celá čísla od 1 do 9 podle zadání početní úlohy.

Komentované řešení

Úkol 1

Bez základních dovedností (jako jsou např. zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami či logická funkce) se při tvorbě tabulky neobejdeme. Barevné rozlišení buněk nám pomůže lépe se v tabulce orientovat, kontrolní výpočty nás mohou upozornit na případnou chybu.



Úkol 2

V naší tabulce se po zapsání logické funkce do buňky K6 objevilo ANO, protože požadovaný součet v řádku má hodnotu nula a číselný výraz, ve kterém jsou uvedené buňky nevyplněny, má také hodnotu nula (viz soubor *1_1_Scitej_odcitej_nasob_Tab).*

Úkol 3

Čísla správně doplněná do připravené tabulky vidíte na obrázku vlevo. Toto řešení je též uvedeno v souboru *1_1_Scitej_odcitej_nasob_Res.*

1.2 Sedmé nebe

Tematický okruh: početní operace, množiny

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk), formát buňky (číslo a text), zápis vzorců (absolutní adresování), funkce POWER, ČÁST, COUNTIF, podmíněné formátování buňky

Připravené soubory: *1_2_Sedme_nebe_Res*

Zadání aktivity

Pojďme spolu prozkoumat mocniny čísla 2 a možná najdeme *sedmé nebe*. Jedná se totiž o jeden zajímavý matematický problém. Vypišme si členy posloupnosti, kterou tvoří mocniny čísla 2:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n \ldots$

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048 ...

Když si budeme všímat jen prvních číslic v zápisu členů posloupnosti, dostaneme posloupnost

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, ...

Objeví se v této posloupnosti někdy sedmička? Matematicky řečeno, najdeme takové celé číslo *m*, aby první číslice zápisu čísla 2^m byla rovna sedmi? Matematici pojmenovali množinu čísel, která splňují uvedenou podmínku, **sedmé nebe**. Je *sedmé nebe* prázdné, nebo se nám podaří nějaké prvky této množiny najít?

Úkol 1

Připravte si podle následujícího vzoru záhlaví tabulky, která vám umožní vyhledat první číslici v zápisu mocnin o základu 2 (exponent bude postupně nabývat celočíselných hodnot 0, 1, 2, …, 150). Ověřte, že posloupnost prvních číslic obsahuje i číslici 7.

	A	B	C	D
1		Exponent	Hodnota mocniny 2	První číslice
2		0	1	**1**
3		1	2	**2**
4		2	4	**4**
5		3	8	**8**
6		4	16	**1**
7		5	32	**3**

Pod záhlavím tabulky vyplňte buňky sloupce B číselnými hodnotami exponentu od 0 do 150. Do buňky C2 zapište vzorec pro výpočet mocniny o základu 2 s požadovaným exponentem =POWER(2;$B2). V buňce D2 využijte vzorec =ČÁST(D2;1;1), který zapíše první číslici zápisu čísla v buňce D2. Připravené vzorce zkopírujte do dalších řádků tabulky.

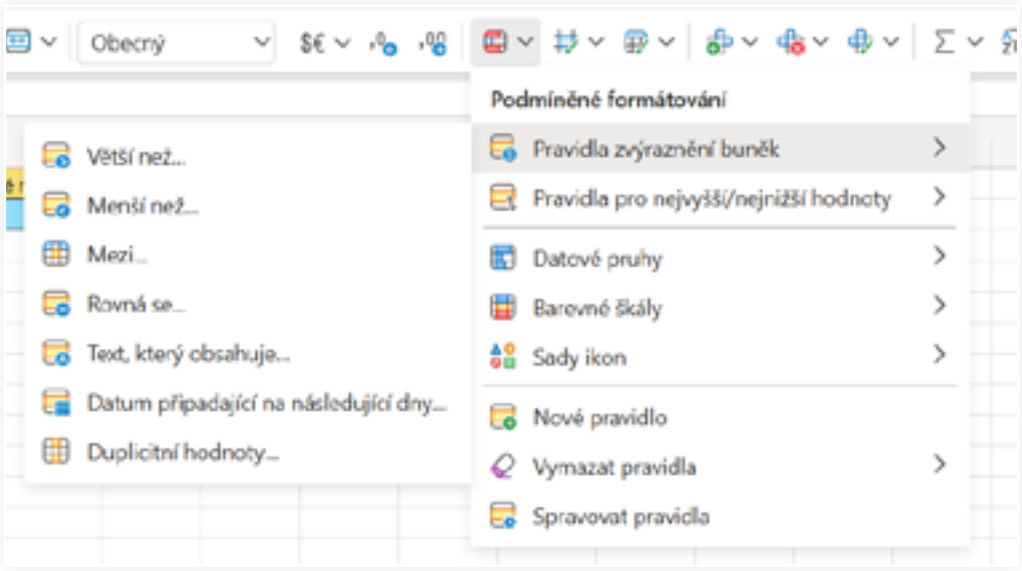
Úkol 2

Pro lepší orientaci v rozsáhlé tabulce zajistěte, aby se buňka ve sloupci D modře vybarvila, když se v ní objeví číslice 7. Do sloupce F přidejte záhlaví *Počet prvků v množině sedmé nebe,* do buňky F2 zapište vzorec, který určí počet všech objevených sedmiček ve sloupci D.

F2 =COUNTIF(D2:D152;"7")

	A	B	C	D	E	F
1		Exponent	Hodnota mocniny 2	První číslice		Počet prvků v množině Sedmé nebe
2		0	1	**1**		**7**
3		1	2	**2**		
4		2	4	**4**		
5		3	8	**8**		

Pro obarvení buněk, ve kterých se objeví 7, využijte v nabídce *Domů* tzv. *Podmíněné formátování,* které nastavte od buňky D2 ve všech řádcích sloupce D, viz následující obrázek.



Úkol 3

Kolik sedmiček jste našli a které prvky tedy patří do množiny *sedmé nebe*?

Komentované řešení

Úkol 1–3

Řešení naleznete v souboru *1_2_Sedme_nebe_Res.*

V celé tabulce, kterou jsme vytvořili, najdeme sedm mocnin čísla 2, které začínají číslicí 7. Do množiny *sedmé nebe* tedy patří čísla 46, 56, 66, 76, 86, 96 a 149. Najít všechny prvky množiny *sedmé nebe* se vám však nepodaří. Je jich totiž nekonečně mnoho!

1.3 Tabulka jako důkaz

Tematický okruh: aritmetika, číselné množiny

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk); formát buňky (číslo, text); ukotvení příček; zápis vzorců (relativní a absolutní adresování); logická funkce KDYŽ; funkce ABS, ČÁST; spojování řetězců znaků; podmíněné formátování řádku

Připravené soubory: *1_3_Tabulka_jako_dukaz_Res*

Zadání aktivity

Od nepaměti jsou lidé fascinováni světem čísel. Není tedy divu, že i matematici podrobně zkoumali čísla a rozdělovali je do skupin podle jejich vlastností. Dnes je běžné pracovat v matematice s číselnými množinami, které mají konečný počet prvků, ale i s množinami, ve kterých je čísel nekonečně mnoho (např. množina přirozených čísel, celých čísel...). Dokazovat nějaké matematické vztahy, které platí pro nekonečný počet čísel, je velmi obtížné. Jestliže je však množina čísel, pro které máme dokázat nějakou hypotézu,

konečná, může být důkaz mnohem jednodušší. Ukážeme si to na důkazu jednoho matematického tvrzení, které budeme ověřovat pro všechna trojciferná celá čísla.

Úkol 1

Eva si přečetla v knížce *1089 a další parádní čísla,* kterou napsal David Acheson, následující matematické „kouzlo“:

Zvolte si nějaké trojciferné číslo. Může to být zcela libovolné trojciferné číslo, ale první číslice v zápisu čísla se od třetí číslice musí lišit alespoň o dvě (např. 782). Vytvořte číslo v „převráceném tvaru“ (pro 782 to je číslo 287) a z takto vzniklých dvou trojciferných čísel odečtěte to menší od většího (782 – 287 = 495). Opět vytvořte číslo v „převráceném tvaru“ (594) a obě čísla sečtěte. Vyšlo vám 1089? Takového výsledku dosáhnete vždy, ať už na počátku zvolíte jakékoliv trojciferné číslo.

Eva se rozhodla, že využije možnosti tabulky s mnoha řádky a že si kouzlo ověří pro celá čísla od 100 do 999. S výsledkem své práce však nebyla spokojená. Pokusíme se teď spolu zjistit, kde udělala chybu.

Připravte si tabulku podle následujícího vzoru a pokynů přesně tak, jak postupovala Eva.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Zvolené číslo	Cifry			Převrácení	Absolutní hodnota rozdílu	Cifry			Převrácení	Součet
2		100	1	0	0	001	99	9	9		99	198
3		101	1	0	1	101	0	0			0	0
4		102	1	0	2	201	99	9	9		99	198
5		103	1	0	3	301	198	1	9	8	891	1089
6		104	1	0	4	401	297	2	9	7	792	1089
7		105	1	0	5	501	396	3	9	6	693	1089

Jednotlivé číslice čísla zapsaného v buňce B2 určete pomocí funkce =ČÁST($B2;1;1), kterou zapíšete do buňky C2 a zkopírujete do buněk D2 a E2. Absolutní adresace vám zajistí, že se vždy budete odvolávat na buňku B2. Jen musíte upravit vzorce tak, aby se vám v buňce D2 vypsala druhá a v buňce E2 třetí číslice.

„Převrácený tvar“ zvoleného čísla zajistěte funkcí, která spojí vybrané řetězce znaků ve zvoleném pořadí (do buňky F2 zapište =E2&“ “&D2&“ “&C2).

Abyste nemuseli zkoumat při odčítání původního a převráceného čísla, které z těchto čísle je větší, použijte v buňce G2 absolutní hodnotu rozdílu.

Ve sloupcích H, I, K a L pokračujte analogicky. Kontrolou zvolených vzorců vám mohou být číselné údaje na výše uvedeném obrázku.

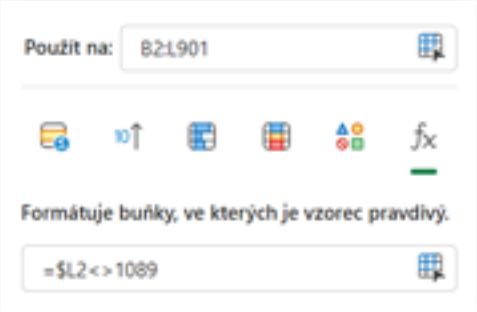
Druhý řádek s připravenými vzorci zkopírujte do celé tabulky.

Už víte, proč nebyla Eva s výsledkem své práce spokojená?

Úkol 2

Eva si myslela, že pro všechna zvolená čísla v tabulce, kterou vytvořila, bude výsledkem číslo 1089. To se však v tabulce nesplnilo. Pro lepší orientaci v rozsáhlé tabulce ukotvěte horní řádek a pomocí podmíněného formátování zajistěte, aby se v celé tabulce modře vybarvily ty řádky, ve kterých není součet 1089. Těmto řádkům věnujte pozornost. Na co Eva při tvorbě tabulky zapomněla?

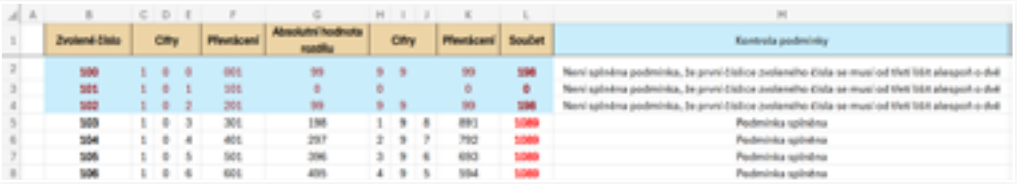
Ukotvení horního řádku zvolíte na kartě *Zobrazení* v nabídce *Ukotvit podokna*.



Pro podmíněné formátování celého řádku nastavte kurzor na buňku B2 a vyznačte celou tabulku bez záhlaví (s výhodou využijte CTRL + SHIFT + PgDn a následně CTRL + SHIFT + PgUp). Vyberte podmíněné formátování, *Nové pravidlo*. Zapište odpovídající vzorec a zvolte modrou barvu.

Úkol 3

Eva zapomněla na podmínku, která je na začátku matematického „kouzla“ uvedena: *první číslice v zápisu čísla se od třetí číslice musí lišit alespoň o dvě***. Součtu 1089 v tabulce nedosáhla pouze v případech, kdy zadaná čísla nesplňovala tuto podmínku. Do tabulky přidejte logickou funkci, která toto tvrzení ověří.**



Jestliže bude absolutní hodnota rozdílu hodnot v buňkách C2 a E2 menší než dvě, nechte ve sloupci M pomocí logické funkce KDYŽ napsat *Není splněna podmínka, že první číslice zvoleného čísla se musí od třetí lišit alespoň o dvě*, v opačném případě zapište *Podmínka splněna*.

Úkol 4

Protože množina čísel, pro která jsme ověřovali dané matematické tvrzení, byla konečná, mohli jsme k ověření použít tabulku s konečným počtem řádků. Kdyby vás zajímalo, zda toto tvrzení lze dokázat i bez tabulky, najdete matematický důkaz ve výše uvedené knize.

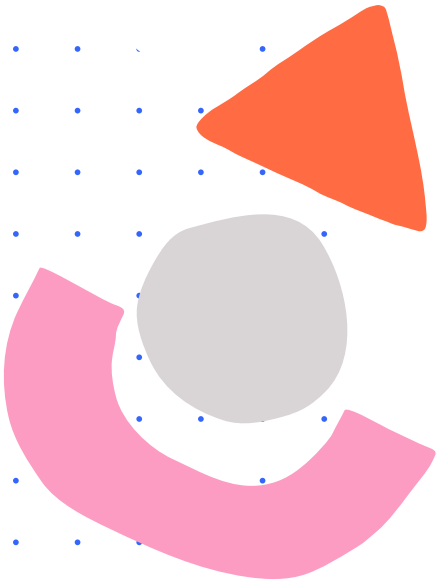
Komentované řešení

Úkol 1–3

Řešení naleznete v souboru *1_3_Tabulka_jako_dukaz_Res.*

2.

Geometrická představivost



OBSAH KAPITOLY

Po prostudování kapitoly ***Geometrická představivost*** byste měli umět rozvíjet následující digitální dovednosti:

- odhad plochy v aplikaci Mapy.cz
- kreslení úsečky dané délky v aplikaci Mapy.cz
- kopírování vzorců a zápis čísla π v tabulce
- řazení dat v tabulkovém procesoru
- vkládání „výstřižků“ do textu a do souboru
- vkládání obrázku do nákresny programu GeoGebra
- znázorňování geometrických útvarů, funkcí a binárních relací v programu GeoGebra
- kreslení kružnice zadané středem a jedním jejím bodem

Uvedené digitální dovednosti budou využity v následujících matematických tématech:

- planimetrie
- statistika
- analytická geometrie
- funkce, binární relace

AKTIVITY PRO ROZVOJ UVEDENÝCH DOVEDNOSTÍ

2.1 Kruh, Kroužek, Kolo, Kolečko

Tematické okruhy: planimetrie, statistika

Digitální technologie: aplikace Mapy.cz, tabulkový procesor (např. Excel), textový editor (např. Word), internet

Konkrétní digitální dovednosti: odhad plochy rovinných obrazců, kopírování vzorců, zápis čísla π, vkládání „výstřižků“ do textu, řazení dat

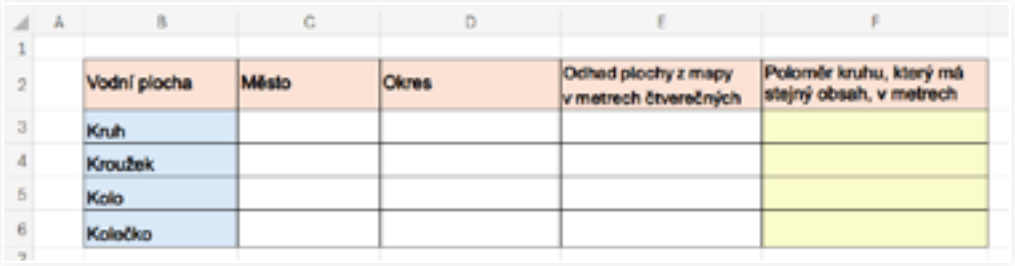
Připravené soubory: *2_1_Kruh_Krouzek_Tab, 2_1_Kruh_Krouzek_Res*

Zadání aktivity

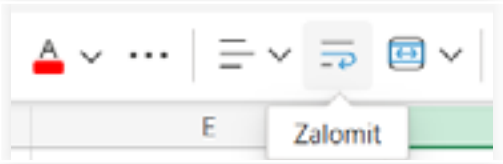
Při hodině geometrie, když paní učitelka hovořila o geometrických obrazcích, si Sára vzpomněla, že o prázdninách šla s kamarády kolem rybníku Kruh. Napadlo ji, zda v České republice existují nějaké další vodní plochy, které mají podobná jména. Když přišla domů, otevřela si na počítači aplikaci Mapy.cz a začala hledat. Našla čtyři vodní plochy: Kruh, Kroužek, Kolo a Kolečko.

Úkol 1

K přehlednému zápisu údajů si Sára připravila v Excelu tabulku, kterou vidíte na obrázku. I vy si připravte takovou tabulku.



	A	B	C	D	E	F
1						
2		Vodní plocha	Město	Okres	Odhad plochy z mapy v metrech čtverečných	Poloměr kruhu, který má stejný obsah, v metrech
3		Kruh				
4		Kroužek				
5		Kolo				
6		Kolečko				



Jestliže v buňce není vidět celý text, a přitom nechceme zvětšovat šířku sloupce, provedeme zalomení textu. Buď využijeme na kartě *Domů* ikonku *zalomení textu* (viz obr.), nebo po kliknutí pravým tlačítkem na buňku vybereme *Formátovat buňky*, *Zarovnání*, *Nastavení textu, Zalomit*.

Úkol 2

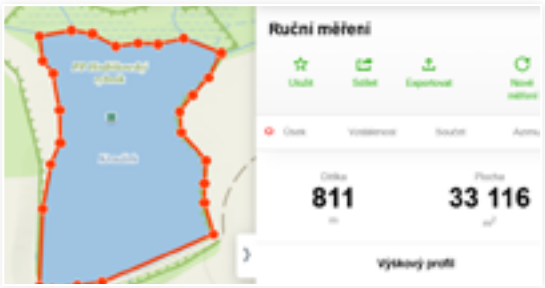
Do buňky F2 v připravené tabulce zapište vzorec, který z odhadu plochy z mapy vypočítá poloměr kruhu, který by měl stejný obsah. Formát výsledku nastavte na dvě desetinná místa. Vzorec zkopírujte do ostatních žlutě vybarvených buněk.

Nastavení počtu desetinných míst výsledku provedeme opět po kliknutí pravým tlačítkem na buňku přes *Formátovat buňky.* Tentokrát vybereme *Číslo*, zvolíme kategorii a nastavíme počet desetinných míst.

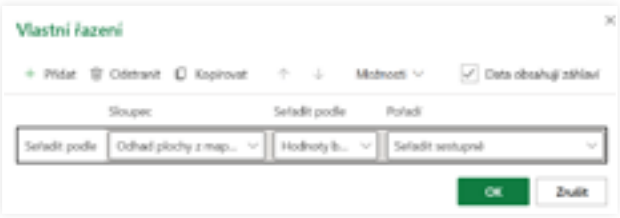
Úkol 3

V aplikaci Mapy.cz proveďte postupně odhad plochy všech čtyř vodních ploch. Vždy po ukončení jednoho měření zapište odhad do tabulky, vytvořte výstřižek s vyznačenými úseky a výsledkem. Otevřete si textový soubor a výstřižek do něj zkopírujte. Po odhadu všech čtyř ploch vyhledejte na internetu další potřebné údaje a připravenou tabulku vyplňte.

V aplikaci Mapy.cz můžeme provádět měření obsahu rovinných útvarů velmi snadno. Stačí kliknout v pravém dolním rohu na nabídku *Nástroje* a vybrat *Měření vzdálenosti a plochy*. Postupným klikáním po obvodu zvoleného útvaru měříme vzdálenost mezi dvěma sousedními body. Vyznačování bodů ukončíme protažením čáry na nabídku *Ukončit měření*.



Po stisknutí klávesy s logem *Windows* současně se *Shift* + *S* se objeví nabídka tvaru výstřižku (můžeme použít též aplikaci Výstřižek). Zvolíme obdélníkový výstřižek a kurzorem, který se změnil na křížek, vyznačíme oblast, kterou chceme kopírovat (viz obrázek). Vyznačený výstřižek se uloží do paměti počítače. Do dokumentu ho vložíme klávesami *Ctrl* + *V*.



Úkol 4

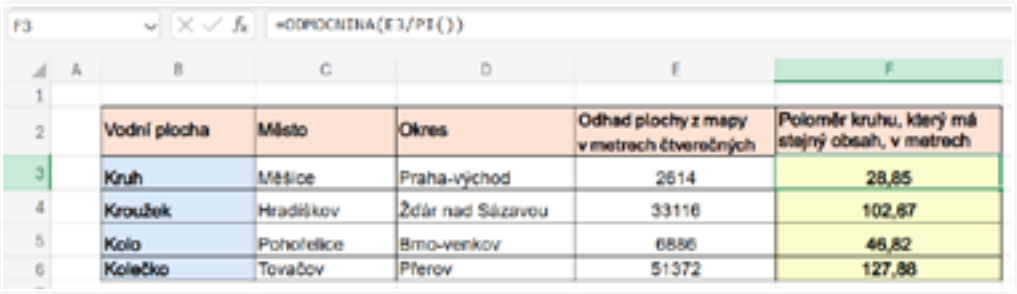
Řádky vyplněné tabulky seřaďte sestupně podle kritéria *Odhad plochy z mapy* a odpovězte, zda je Kruh větší než Kroužek a Kolo větší než Kolečko.

Při řazení dat označíme myší celou tabulku i se záhlavím sloupců, z karty Data vybereme Vlastní řazení a nastavíme požadované kritérium (viz obrázek).

Komentované řešení

Úkol 2 a 3

Jedno z možných řešení, které je zachyceno na následujícím obrázku, naleznete v připraveném souboru *2_1_Kruh_Krouzek_Tab* a odpovídající výstřižky měření v souboru *2_1_Kruh_Krouzek_Res.* Vaše odhady se mohou od uvedených hodnot mírně lišit.



Vodní plocha	Město	Okres	Odhad plochy z mapy v metrech čtverečných	Poloměr kruhu, který má stejný obsah, v metrech
Kruh	Měšice	Praha-východ	2614	28,85
Kroužek	Hradišťkov	Žďár nad Sázavou	33116	102,67
Kolo	Pohořelice	Brno-venkov	6886	46,82
Kolečko	Tovačov	Přerov	51372	127,88

Úkol 4

Výše uvedenou tabulku seřazenou podle kritéria *Odhad plochy z mapy* vidíte na následujícím obrázku. I podle vašeho měření by měl být Kroužek větší než Kruh a Kolečko větší než Kolo.

Vodní plocha	Město	Okres	Odhad plochy z mapy v metrech čtverečných	Poloměr kruhu, který má stejný obsah, v metrech
Kolečko	Tovačov	Přerov	51372	127,88
Kroužek	Hradišťkov	Žďár nad Sázavou	33116	102,67
Kolo	Pohořelice	Brno-venkov	6886	46,82
Kruh	Měšice	Praha-východ	2614	28,85

2.2 Kruh, Kroužek… pro náročné

Tematické okruhy: analytická geometrie

Digitální technologie: tabulkový procesor (např. Excel), aplikace Mapy.cz, program pro interaktivní geometrii (např. GeoGebra)

Konkrétní digitální dovednosti: kreslení úsečky dané délky v aplikaci Mapy.cz, ukládání „výstřižku“ do souboru, vkládání obrázku do nákresny programu GeoGebra, kreslení kružnice zadané středem a jedním jejím bodem

Připravené soubory: *2_2_Kruh_pro_narocne_Res, 2_2_Krouzek_Pol, 2_2_Krouzek*

Zadání aktivity

Z předcházející úlohy víme, že si Sára v aplikaci Mapy.cz našla čtyři vodní plochy, které mají podobná jména Kruh, Kroužek, Kolo, Kolečko. Údaje o nich zpracovala do dvou souborů *2_1_Kruh_Krouzek_Tab* a *2_1_Kruh_Krouzek_Res.* Zajímalo ji, jak by vodní plochy na mapě vypadaly, kdyby byly znázorněny kruhem s vypočítaným poloměrem. Pro modelování se rozhodla využít program GeoGebra. Díky tomu se dozvěděla, jak lze zapsat rovnici kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic.

Úkol 1

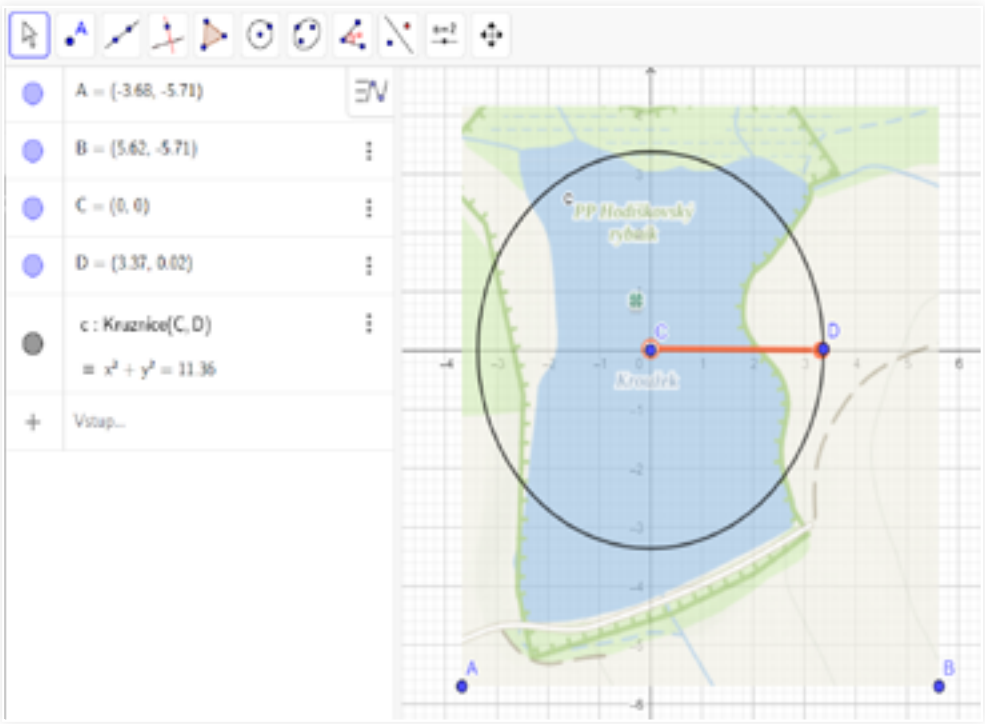
V aplikaci Mapy.cz zakreslete pomocí *Měření velikosti* u každé vodní plochy úsečku o velikosti poloměru (využijte údaje v tabulce *2_1_Kruh_Krouzek_Tab*). Odpovídající výstřižky (viz obrázek, na kterém je znázorněn poloměr pro vodní plochu Kroužek) si uložte do čtyř souborů.

Jestliže chceme výstřižek uložit jako soubor, využijeme možnosti *Revize a sdílení,* která se zobrazí po vyznačení výstřižku.

Úkol 2

V programu GeoGebra zobrazte u každé vodní plochy kružnici pomocí zakresleného poloměru. Všimněte si, jak je kružnice v GeoGebře zapsána. Výstřižky vodních ploch s kružnicí na podkladu mapy vložte do souboru *2_1_Kruh_Krouzek_Res*.

Do nákresny programu GeoGebra můžeme vložit obrázek. Stačí obsah souboru, ve kterém je obrázek uložen, zkopírovat a do nákresny GeoGebry vložit (Ctrl + V). Vloženým obrázkem můžeme pohybovat a umístit ho na vhodné místo do soustavy souřadnic (např. tak, aby jeden z bodů vyznačeného průměru ležel v počátku soustavy souřadnic). Po kliknutí pravým tlačítkem myši do obrázku vybereme položky *Nastavení, Barva* a snížíme neprůhlednost, aby osy soustavy souřadnic byly viditelné. Poznámka: před kopírováním je potřeba obrázek upravit (oříznout, otočit apod.), po vložení do nákresny už úprava nebude možná.



Komentované řešení

Úkol 1

Řešením jsou čtyři soubory, ve kterých jsou uloženy výstřižky jednotlivých vodních ploch se znázorněnou úsečkou odpovídající délce vypočítaného poloměru (jako ukázka je připraven soubor *2_2_Kroužek_Pol*).

Úkol 2

Práce v GeoGebře potřebuje určitý cvik. Kdyby se vám něco nedařilo, nezoufejte. Na internetu existuje řada návodů, jak s programem GeoGebra pracovat, jeho ovládání je velmi intuitivní.

Jestliže potřebujete v programu GeoGebra uložit soubor, kliknete na tři čárky vpravo nahoře, rozvine se vám nabídka pro práci se soubory. Vyplatí se vám, když využijete poslední nabídky *Přihlásit se* a zadáte svůj e-mail s heslem. Po přihlášení se v poslední položce objeví vaše jméno.

Pro uložení souboru nyní můžete využít položku *Uložit online (*v tom případě máte soubor dostupný vždy, když se do programu GeoGebra přihlásíte) nebo *Uložit do počítače*. Zapíšete název (např. Krouzek) a odkliknete *Uložit*. Jestliže máte na počítači instalovaný program GeoGebra, připravené soubory *2_2_Krouzek* by se vám měly po dvojkliku otevřít.

Protože znázorněná kružnice má svůj střed ve středu soustavy souřadnic, její rovnici odpovídá zápis kružnice ve středovém tvaru $x^2 + y^2 = r^2$.

2.3 Nakresli mi srdce

Tematické okruhy: geometrie, funkce, případně binární relace

Digitální technologie: program pro interaktivní geometrii, např. GeoGebra

Konkrétní digitální dovednosti: znázorňování geometrických útvarů, funkcí a binárních relací

Připravené soubory: *2_3_Srdce_ILNY, 2_3_Srdce_CBC, 2_3_Srdce_fce*

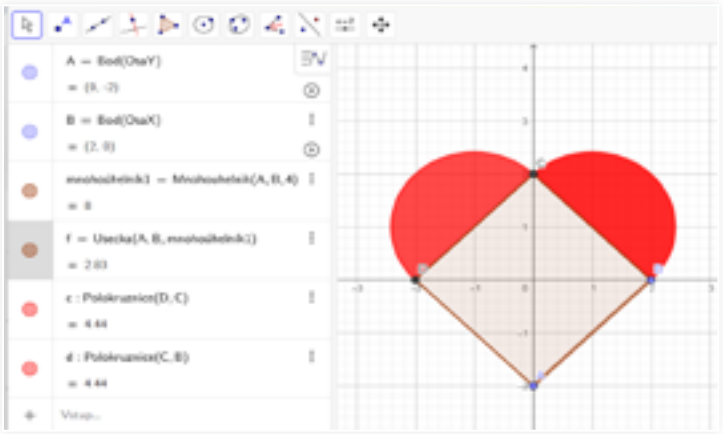
Zadání aktivity

Mezi modernější umělecké směry patří tzv. design. V češtině se dříve užíval název „průmyslové výtvarnictví“, který však zahrnoval jen tvarování průmyslových výrobků (strojů, nástrojů, nábytku, oděvů atd.). Naproti tomu dnešní design zahrnuje i grafické návrhy

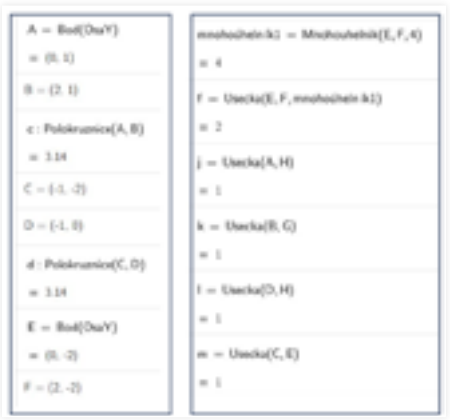
plakátů a tiskovin, webových stránek, obalů, reklamních značek a firemních kampaní. Na obrázku vidíte ikonický symbol cestovního ruchu *I Love New York*.

Úkol 1

V prostředí programu GeoGebra bychom srdce z reklamní kampaně *I Love New York* zakreslovali postupně označováním bodů v nákresně nebo volbou příkazů z nabídky. Vlevo se postupně zapisují provedené volby, jak je zachyceno na obrázku.

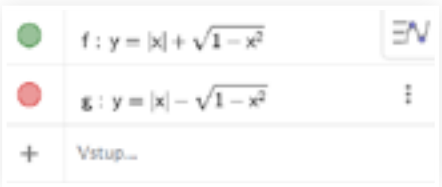


Srdce bylo ústředním motivem i reklamní kampaně kanadské veřejnoprávní televizní a rozhlasové stanice CBC. Na papír načrtněte systém souřadnic a tvar srdce, který by byl v GeoGebře popsán následujícími příkazy:



Úkol 2

Jiný tvar srdce a popis charakteristických vlastností pomocí dvou funkcí je popsán následujícími příkazy:



Nejprve se pokuste načrtnout, jaký by mohlo mít srdce tvar. Potom postupně zapište funkce do vstupů GeoGebry a pozorujte, jak se kresba mění.

Úkol 3

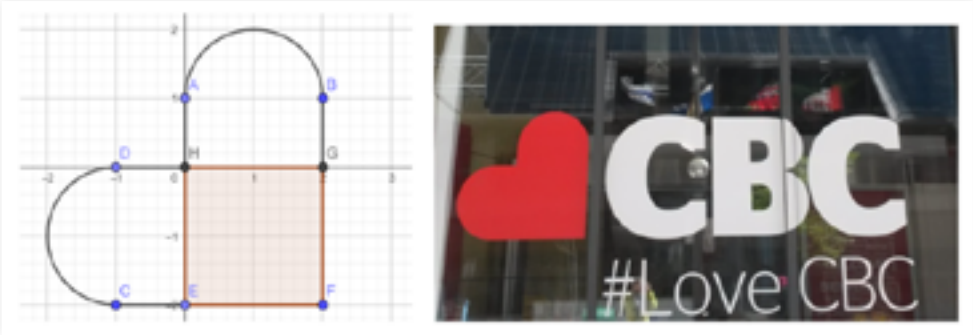
V GeoGebře naleznete i řadu připravených souborů. Jeden z nich např. zakreslí srdce pomocí funkce:

$$y = \sqrt[100]{4 - x^2} \cdot \left(\cos 50x \cdot \sqrt{\cos x} + \sqrt{|x|}\right)$$

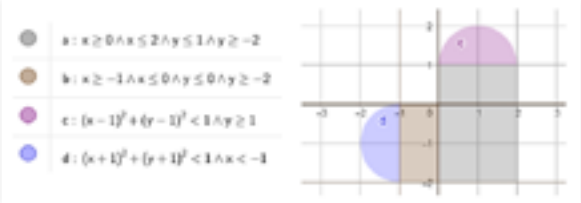
Ve vyhledávání v GeoGebře využijte nejen české slovo *srdce*, ale i jeho anglický překlad. Sdílené soubory si prohlédněte.

Komentované řešení

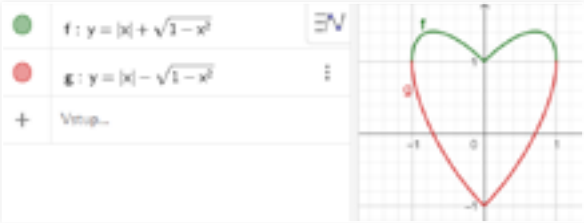
Úkol 1



Něco navíc: Kdybychom chtěli obrázek srdce popsat pomocí charakteristických vlastností binárních relací, mohli bychom využít i toho, že se skládá ze dvou půlkruhů a dvou obdélníků. Charakteristické vlastnosti těchto tvarů lze zapsat do vstupních řádků takto:



Úkol 2



2.3 Galerie pro matematiky

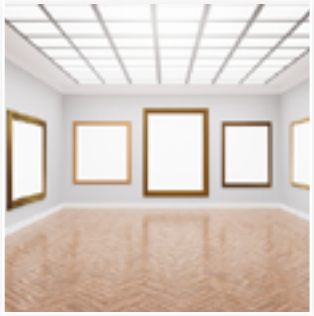
Tematické okruhy: planimetrie, funkce, případně binární relace

Digitální technologie: program pro interaktivní geometrii, např. GeoGebra

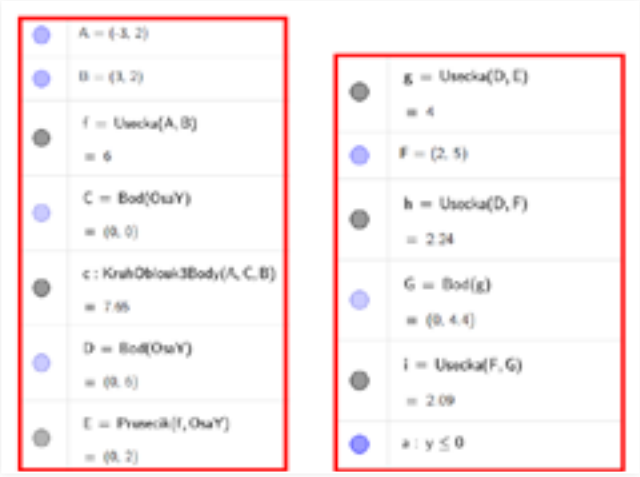
Konkrétní digitální dovednosti: znázorňování geometrických útvarů, funkcí a binárních relací

Připravené soubory: *2_4_Obraz_1*, *2_4_Obraz_2*, *2_4_Prasatko*

Zadání aktivity



Všichni jste alespoň jednou byli v galerii výtvarného umění. Na stěnách byly zavěšeny obrazy, u kterých bylo uvedeno, kdo obraz namaloval a jak se obraz jmenuje. V *Galerii pro matematiky* je to trochu jiné. Na stěnách jsou zavěšeny rámy, ve kterých jsou místo obrazů matematické zápisy pro zakreslení geometrických útvarů, funkcí apod. Návštěvník takové galerie si ale umí velmi dobře představit, co by podle těchto zápisů bylo znázorněno třeba v programu GeoGebra.

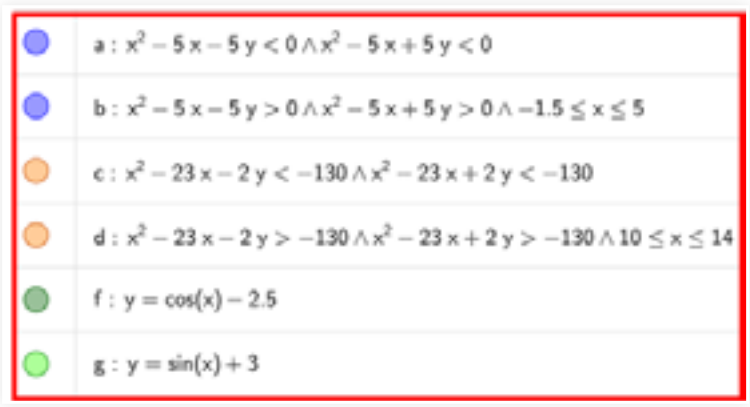


Úkol 1

V *Galerii pro matematiky* je zavěšeno výtvarné dílo, který je zachyceno na následujícím obrázku. Nejprve odhadněte jen pomocí tužky a papíru, co je na obraze zakresleno. Poté svůj odhad ověřte v prostředí programu GeoGebra.

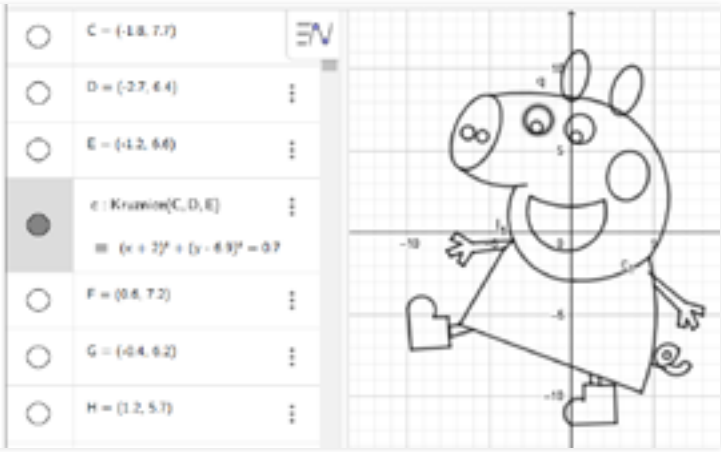
Úkol 2

Jiný příklad výtvarného díla z *Galerie pro matematiky* je zachycen na následujícím obrázku. Odhadněte jen pomocí tužky a papíru, co je na obraze zakresleno, poté ověřte svůj odhad v prostředí programu GeoGebra.



Úkol 3

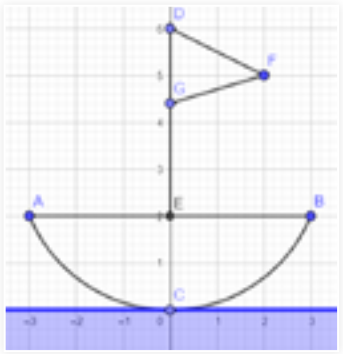
V GeoGebře naleznete i řadu připravených souborů, které podporují myšlenku *Galerie pro matematiky*. Jeden z nich (*2_4_Prasatko*) jsme pro vás vybrali. Jestliže kliknete na některou část obrázku (např. levé oko), uvidíte, jak je tento objekt v GeoGebře zapsán.



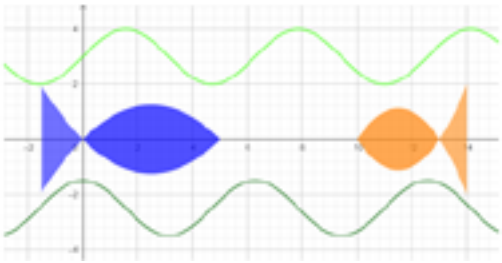
Až si zápisy prohlédnete, nakreslete svůj obrázek, jehož popis by mohl být umístěn v *Galerii pro matematiky*. Soubor stáhněte jako dynamický pracovní list.

Komentované řešení

Úkol 1

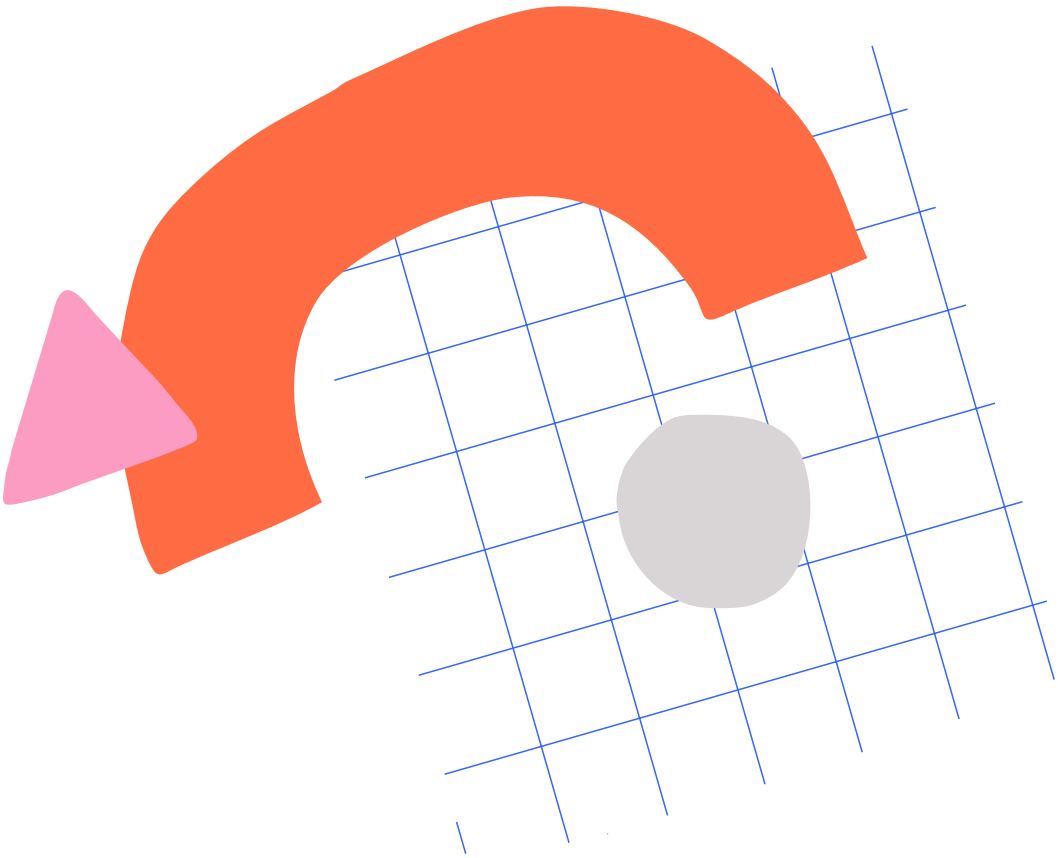


Úkol 2



3.

Objevování zákonitostí



OBSAH KAPITOLY

Po prostudování kapitoly *Objevování zákonitostí* byste měli umět rozvíjet následující digitální dovednosti:

- základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami)
- kopírování vybraných buněk i celé tabulky, vkládání řádků a sloupců
- vkládání a kopírování vzorců (relativní a absolutní adresování)
- součet čísel v sousedních buňkách tabulky, postupné přičítání čísel
- využívání logické funkce KDYŽ
- využívání funkcí TG, ODMOCNINA, SIGN

Uvedené digitální dovednosti budou využity v následujících matematických tématech:

- kombinatorika
- číselné obory
- posloupnosti a řady
- porozumění matematickému textu

AKTIVITY PRO ROZVOJ UVEDENÝCH DOVEDNOSTÍ

3.1 Shut the Box

Tematický okruh: kombinatorika

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk), součet čísel v sousedních buňkách, logická funkce, kopírování tabulky, vkládání řádků a sloupců

Připravené soubory: *3_1_Shut_the_Box_Res1, 3_1_Shut_the_Box_Res2*

Zadání aktivity

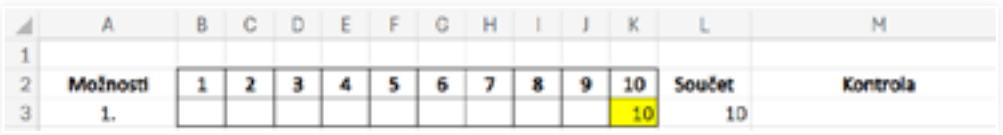
Hra *Shut the Box* pravděpodobně vznikla v polovině 18. století v Normandii. Hráli ji zde námořníci a rybáři. Potřebovali k tomu dvě hrací kostky a dřevěnou krabičku s dvanácti klapkami, na kterých byla napsána čísla od 1 do 12.

Jak se *Shut the Box* hraje? Hráč hodí oběma kostkami a sečte počet bodů (na obrázku hráč hodil součet 7). Rozhodne se, které klapky sklopí, aby součet bodů na sklopených klapkách odpovídal hozenému součtu (na obrázku hráč sklopil jednu klapku s číslem 7, mohl ale sklopit klapky 3 a 4 nebo třeba klapky 1, 2 a 4). Znovu hodí kostkami, zjistí součet, vybere si odpovídající klapky, které ještě nejsou sklopené, a sklopí je. Tak postupuje, dokud může něco sklopit (např. při součtu 10 by sklopil klapky 2, 3, a 5; kdyby mu potom padl součet 2, klapku 2 už nemůže využít a hra by pro něj skončila). Na konci hry hráč sečte body na nesklopených klapkách. Cílem je získat co nejmenší počet bodů.

Úkol 1

Kolika různými způsoby můžeme ve hře *Shut the Box* realizovat součet 10?

K přehlednému zápisu si připravte tabulku, jejíž záhlaví a první řádek je na následujícím obrázku. Sklopené klapky v jednotlivých možnostech budete vyznačovat číselnou hodnotou ve vybarvených buňkách. Připravíte si také kontrolu vyznačeného součtu.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	Možnosti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Součet	Kontrola
3	1.										10	10	

Šířku sloupce A a L zvolte 13, šířku sloupců B až K zvolte 4, šířku sloupce M zvolte 25. Do buňky L3 zapište vzorec pro součet buněk B3 až J3 (v nabídce na kartě *Domů* využijte symbol sumy) a zkopírujte ho do všech řádků s nalezenými možnostmi realizace součtu 10. Do buňky M3 zapište logickou funkci pro kontrolu součtu (jestliže je součet 10, zapíšete do buňky červeně a tučně *Součet je v pohodě*, v opačném případě *Pozor!*). Logickou funkci zkopírujte do všech odpovídajících řádků.

Po nalezení všech možností ohraničte buňky tabulky podle vzoru, buňky pod záhlavím *Možnosti* vyplňte pomocí posloupnosti čísel (vzor 1., 2. zapsaný v buňkách A3 a A4 roztáhněte do následujících řádků).

Úkol 2

Platí, že součet 11 lze ve hře *Shut the Box* realizovat jedenácti možnostmi?

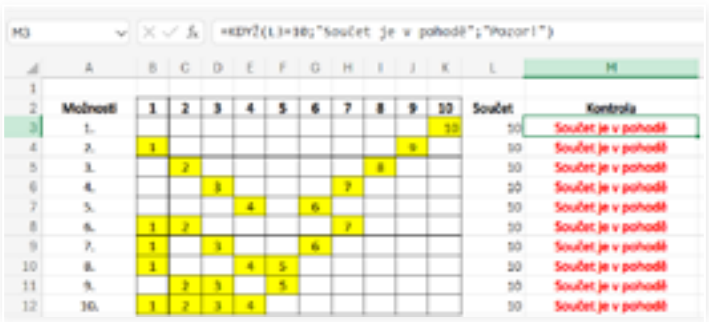
Svou odpověď zdůvodněte vypsáním všech možností s využitím vytvořené tabulky z předchozího úkolu. Využijte kopírování tabulky a vkládání sloupce a řádku. Nezapomeňte zkontrolovat (případně upravit) využité vzorce. Na závěr upravte hodnotu buněk pod záhlavím *Možnosti*.

Úkol 3

Zahrajte si ve dvojici hru *Shut the Box.*

Budete potřebovat dvě hrací kostky (nebo aplikaci, která generuje hod dvěma kostkami). Každý hráč si zapíše posloupnost celých čísel od 1 do 12. Každé číslo představuje jednu klapku ve hře *Shut The Box.* Sklopení vybraných klapek vyznačíte škrtnutím využitých čísel. Při hře se v hodech hráči střídají a čísla si škrtají ve svém zápisu. Jestliže jeden hráč už nemůže dál hrát, neznamená to, že druhý hráč ve hře nepokračuje.

Komentované řešení



Úkol 1

Všechny možnosti realizace součtu deset, které jsou zakresleny na obrázku, naleznete také v souboru *3_1_Shut_the_Box_Res1.*

Úkol 2

Všechny možnosti realizace součtu jedenáct, kterých je dvanáct, naleznete v souboru 3_1_ *Shut_the_Box_Res2* a na následujícím obrázku.

3.2 Odhad čísla π

Tematický okruh: číselné obory, posloupnosti a řady, porozumění matematickému textu

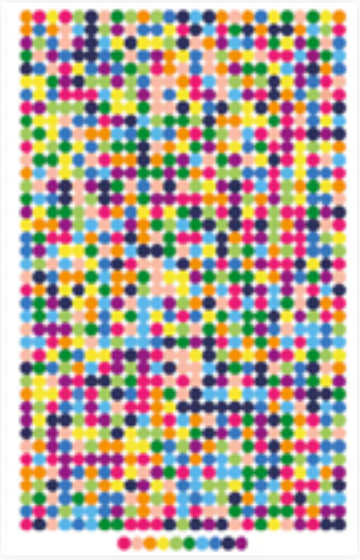
Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk); postupné přičítání čísel; vkládání a kopírování vzorců (relativní adresace); funkce TG, ODMOCNINA, SIGN

Připravené soubory: *3_2_Odhad_PI_Res*

Zadání aktivity

Ze základní školy znáte matematickou konstantu, která je označována symbolem π. Víte, že číslo π je iracionální, má v desítkové soustavě nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Řada slavných matematiků se pokoušela objevit vzorce, pomocí kterých by se číslo π určilo s „přijatelnou“ přesností. V následujících úkolech se seznámíme s některými z nich a porovnáme jejich přesnost. Fascinace konstantou π se promítá i mimo matematiku. Na *YouTube* můžete např. najít písničky, ve kterých se zpívá o čísle π, sochaři tvoří prostorové objekty a malíři vytváří obrazy inspirované číslem π. Na následujícím obrázku je vizualizováno prvních tisíc číslic tohoto čísla. Za zmínku stojí i tzv. *Pi Day*, který se na celém světě slaví od roku 1988 vždy 14. března. Při oslavách by neměl chybět koláč ve tvaru kruhu. Anglicky se totiž koláč (pie) vyslovuje stejně jako řecké písmeno π.



Úkol 1

Objevte a popište postup, podle kterého uvedená vizualizace čísla π vznikla.

Úkol 2

Pomocí tabulkového procesoru nalezněte prvních dvacet členů posloupnosti, která je dána rekurentním předpisem:

$T_1 = 2$

$T_{n+1} = T_n - \operatorname{tg}(T_n)$.

Prohlédněte si, jakou „rychlostí“ se členy posloupnosti blíží k číslu π.

V tabulkovém procesoru si připravte tabulku podle následujícího vzoru:

	A	B	C	D
1		Posloupnost zadaná rekurentně		
2		Pořadí členů posloupnosti	Hodnota členů posloupnosti	
3		1	2	
4		2	4,1850398632615200	
5		3	2,4678936745146700	
6		4	3,2661862775691100	

Do buňky C4 zapište vzorec, který od hodnoty v buňce C3 odečte tangens číselné hodnoty uložené v buňce C3. Jestliže tento vzorec zkopírujete do dalších řádků, uvidíte, jak se zpřesňuje odhad čísla π.

Úkol 3

V polovině 17. století byla formulována jedna ze známých matematických úloh, tzv. *Bazilejský problém:* sečíst nekonečnou řadu převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Až v roce 1735 dokázal švýcarský matematik a fyzik Leonard Euler, že součet této nekonečné řady je roven šestině druhé mocniny čísla π.

Pomocí tabulkového procesoru nalezněte součet prvních dvaceti členů uvedené nekonečné řady.

Na stejný list vedle tabulky, kterou jste vytvořili pro členy rekurentní posloupnosti, si připravte tabulku podle následujícího vzoru:

	D	E	F	G
1		Bazilejský problém		
2		Pořadí zlomku	Postupné součty	Hodnota čísla Pi
3			1	
4		1	1,2500000000000000	2,7386127875258300
5		2	1,3611111111111100	2,8577380332470400
6		3	1,4236111111111100	2,9226129861250300
7		4	1,4636111111111100	2,9633877010385700
8		5	1,4913888888888900	2,9913764947484200

Do buňky F4 zapište vzorec, který k hodnotě v buňce F3 přičte převrácenou hodnotu druhé mocniny hodnoty v buňce E5. Do buňky G4 zapište vzorec, který pomocí hodnoty v buňce F4 vypočítá odhad čísla π. Jestliže tyto vzorce zkopírujete do následujících řádků, uvidíte, jak se tento odhad zpřesňuje. Všimněte si, že zpřesňování je „velmi pomalé“. Využijte velkého rozsahu tabulky a zjistěte odhad čísla π na 350 řádků.

Úkol 4

Indický matematik a astronom Nilakantha Somayaji (1444–1544) velmi dobře odhadl číslo, které dnes označujeme π, pomocí nekonečné řady:

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \cdots$$

Pomocí tabulkového procesoru nalezněte součet prvních dvaceti členů uvedené nekonečné řady.

Vedle tabulky, kterou jste vytvořili pro *Bazilejský problém*, si připravte tabulku podle následujícího vzoru:

	H	I	J	K	L
1		Postupné součty Nilakanthovy nekonečné řady			
2		Pořadí zlomku	Nejmenší číslo ve jmenovateli	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty
3					3
4		1	2	0,1666666666666670	3,1666666666666700
5		2	4	-0,0333333333333333	3,1333333333333300
6		3	6	0,0119047619047619	3,1452380952381000
7		4	8	-0,0055555555555556	3,1396825396825400
8		5	10	0,0030303030303030	3,1427128427128400

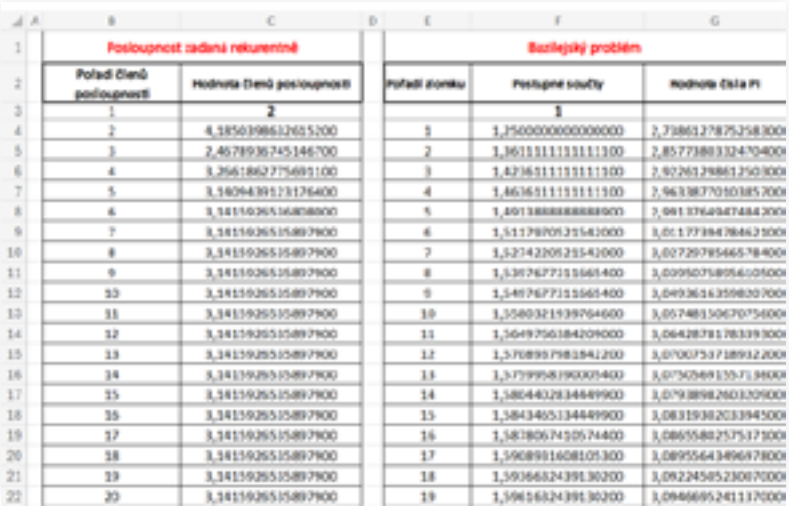
Do buňky K4 zapište vzorec, který určí hodnotu prvního zlomku v závislosti na hodnotě v buňce J2. Protože se v nekonečné řadě střídají znaménka, využijte v buňce K5 funkci SIGN. Tato funkce zapíše číslo 1 pro kladné číslo, 0 pro nulu, -1 pro záporné číslo (např. máte-li v buňce K4 kladné číslo, vzorec = (-1) * SIGN(K4) * 4/ (J5 * (J5+1) * (J5+2)) zapíše číslo záporné).

Do buňky L4 zapište vzorec, který k hodnotě v buňce L3 přičte připravenou hodnotu zlomku se znaménkem. Jestliže tento vzorec zkopírujete do následujících řádků, uvidíte, jak se zpřesňuje odhad čísla π.

Komentované řešení

Úkol 1

Barevná kolečka v dolní části vizualizace odpovídají číslicím od 0 do 9. V tomto barevném kódu jsou zakresleny postupně cifry čísla π: 3 1 4 1 5 9 2 6 5…



Úkol 2–4

Řešení naleznete v souboru *3_2_Odhad_PI_Res.* Zde si můžete zkontrolovat zapsané vzorce.

Postupné součty Nilakanthovy nekonečné řady			
Pořadí zlomku	Nejmenší číslo ve jmenovateli	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty
			3
1	2	0,1666666666666670	3,1666666666666700
2	4	-0,0333333333333333	3,1333333333333300
3	6	0,0119047619047619	3,1452380952381000
4	8	-0,0055555555555556	3,1396825396825400
5	10	0,0030303030303030	3,1427128427128400
6	12	-0,0018315018315018	3,1408813408813400
7	14	0,0011904761904762	3,1420718170718200
8	16	-0,0008169934640523	3,1412548236077600
9	18	0,0005847953216374	3,1418396189294000
10	20	-0,0004329004329004	3,1414067184965000
11	22	0,0003293807641634	3,1417360992606700
12	24	-0,0002564102564103	3,1414796890042500
13	26	0,0002035002035002	3,1416831892077600
14	28	-0,0001642036124795	3,1415189855952800
15	30	0,0001344086021505	3,1416533941974300
16	32	-0,0001114081996435	3,1415419859977800
17	34	0,0000933706816060	3,1416353566793900
18	36	-0,0000790263948159	3,1415563302845700
19	38	0,0000674763832659	3,1416238066678400

3.3 Číslo π ukryté v Pascalově trojúhelníku

Tematický okruh: číselné obory, posloupnosti a řady, kombinatorika

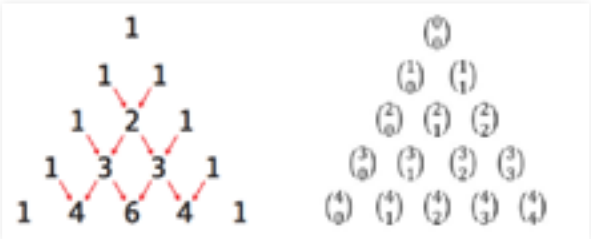
Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk), postupné přičítání čísel, vkládání a kopírování vzorců (relativní adresování), funkce SIGN, kopírování vybraných buněk

Připravené soubory: *3_3_Odhad_PI_Res*

Zadání aktivity

Blaise Pascal (1623–1662) byl francouzský matematik, fyzik a filozof. Je po něm pojmenováno číselné schéma, jehož část vidíte na obrázku. Takzvaný Pascalův trojúhelník je olemován jedničkami a každé další číslo je součtem dvou sousedních čísel „nad ním“. Z hodin kombinatoriky víte, že se v Pascalově trojúhelníku „ukrývají“ kombinační čísla.



Možná nevíte, že v Pascalově trojúhelníku je ukryté i číslo π. V následujících úkolech se seznámíme se dvěma možnostmi a porovnáme je.

Úkol 1

	A	B	C	D	E	F
1						
2		1				
3		1	1			
4		1	2	1		
5		1	3	3	1	
6		1	4	6	4	1

V tabulkovém procesoru si zapsáním červených jedniček vymezte buňky pro znázornění dvaceti řádků Pascalova trojúhelníku. Do buňky C4 zapište odpovídající vzorec, který zkopírujte do prázdných buněk Pascalova trojúhelníku.

Úkol 2

Německý matematik a filozof Gottfried Leibniz (1646–1716) objevil následující vztah mezi číslem π a kombinačními čísly:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{C_1^3} + \frac{1}{C_1^5} - \frac{1}{C_1^7} + \dots \quad \text{, kde } C_1^3 = \binom{3}{1}; C_1^5 = \binom{5}{1} \cdots$$

Pod Pascalovým trojúhelníkem (v souboru z předcházející úlohy) vytvořte tabulku, která vám pomůže zapisovat částečné součty nekonečné řady. Přesvědčte se, že musíme sečíst víc než 140 zlomků, aby odhad čísla π byl po zaokrouhlení na tři desetinná místa 3,141.

	A	B	C	D	E
21	19	1	19	171	969
22	20	1	20	190	1140
23					
24	Leibnitz				
25	Pořadí zlomku	Hodnota kombinačního čísla	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty	Odhad
26				1	
27	1	3	-0,3333333333	0,6666666667	2,667
28	2	5	0,2000000000	0,8666666667	3,467

Úkol 3

Kolumbijský amatérský matematik Jonas Castillo Toloza objevil v roce 2007 následující vztah mezi číslem π a kombinačními čísly:

$$\begin{aligned}\pi - 2 &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} - \dots \\ &= \frac{1}{C_2^2} + \frac{1}{C_2^3} - \frac{1}{C_2^4} - \frac{1}{C_2^5} + \frac{1}{C_2^6} + \frac{1}{C_2^7} - \frac{1}{C_2^8} - \frac{1}{C_2^9} + \frac{1}{C_2^{10}} + \dots\end{aligned}$$

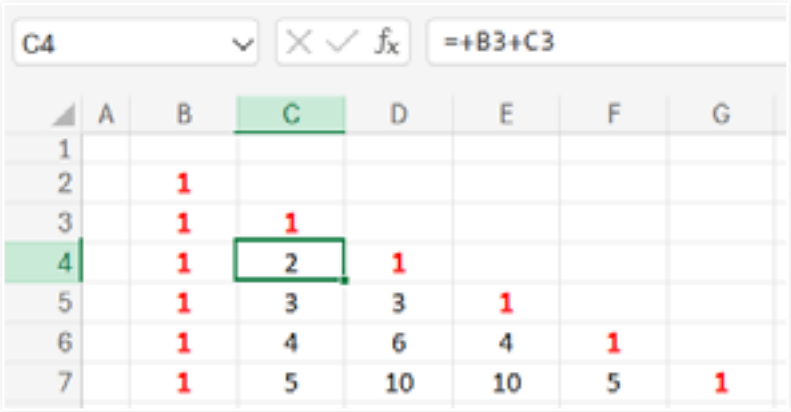
Vedle tabulky, kterou jste vytvořili v předcházející úloze, vytvořte tabulku pro zápis částečných součtů nekonečné řady. Zjistěte, kolik zlomků musíte sečíst, aby odhad čísla π byl po zaokrouhlení na čtyři desetinná místa 3,1413.

	G	H	I	J	K
21	11628	27132	50388	75582	92378
22	15504	38760	77520	125970	167960
23					
24	Toloza				
25	Pořadí zlomku	Znaménko	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty	Odhad
26		1		1	
27	1	1	0,3333333333	1,3333333333	3,3333
28	2	-1	-0,1666666667	1,1666666667	3,1667

Komentované řešení

Úkol 1

Kompletní řešení naleznete v souboru *3_3_Odhad_PI_Res.* Zde si můžete zkontrolovat zapsané vzorce.



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		1					
3		1	1				
4		1	2	1			
5		1	3	3	1		
6		1	4	6	4	1	
7		1	5	10	10	5	1

Úkol 2–3

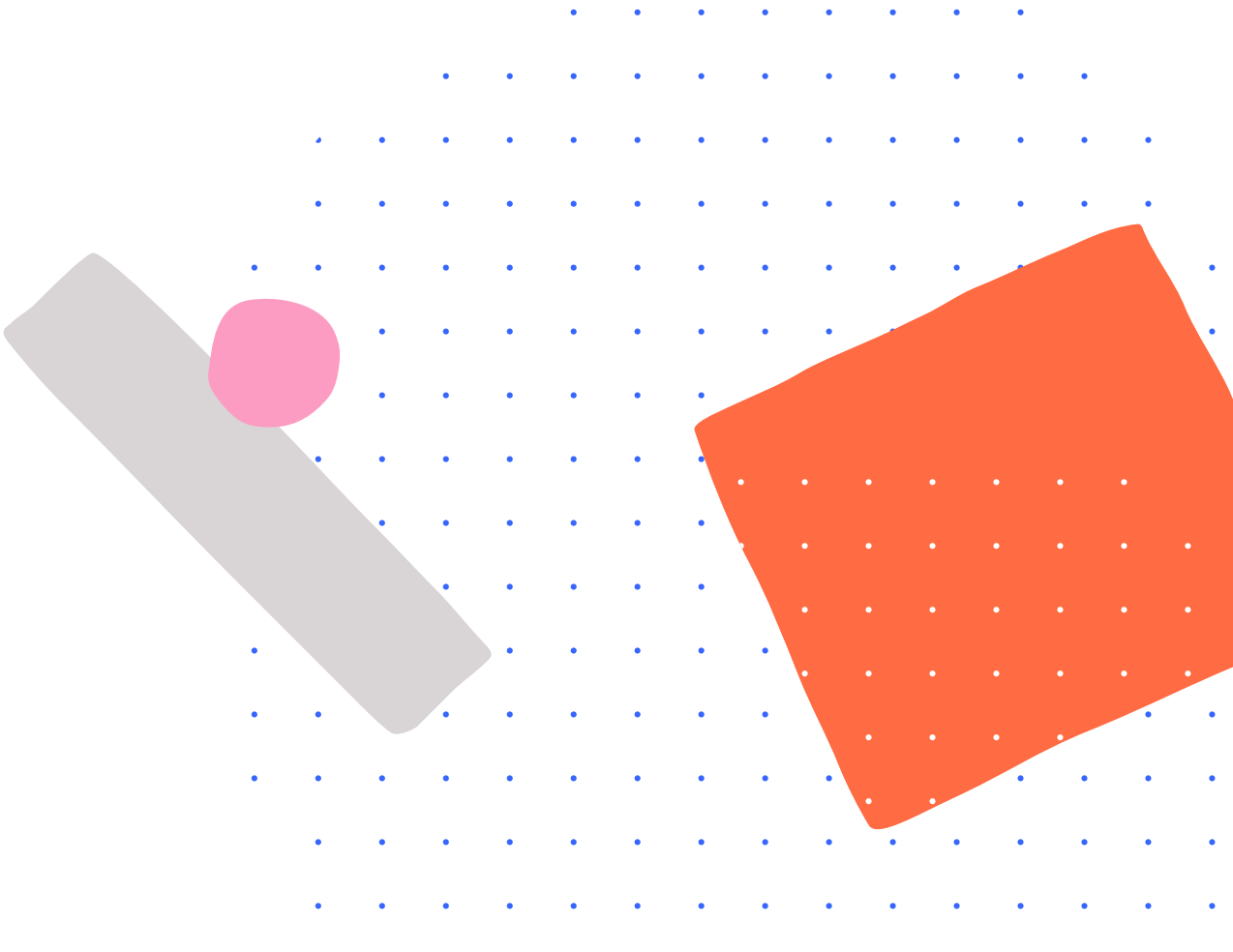
Jedno z možných řešení naleznete v souboru *3_3_Odhad_PI_Res.*
Zde si můžete zkontrolovat zapsané vzorce.

24	Leibnitz				
25	Pořadí zlomku	Hodnota kombinačního čísla	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty	Odhad
26				1	
27	1	3	-0,3333333333	0,6666666667	2,667
28	2	5	0,2000000000	0,8666666667	3,467
29	3	7	-0,1428571429	0,7238095238	2,895
30	4	9	0,1111111111	0,8349206349	3,340
31	5	11	-0,0909090909	0,7440115440	2,976
32	6	13	0,0769230769	0,8209346209	3,284
33	7	15	-0,0666666667	0,7542679543	3,017
34	8	17	0,0588235294	0,8130914837	3,252
35	9	19	-0,0526315789	0,7604599047	3,042
36	10	21	0,0476190476	0,8080789524	3,232
37	11	23	-0,0434782609	0,7646006915	3,058

Toloza				
Pořadí zlomku	Znaménko	Hodnota zlomku se znaménkem	Postupné součty	Odhad
	1		1	
1	1	0,3333333333	1,3333333333	3,3333
2	-1	-0,1666666667	1,1666666667	3,1667
3	-1	-0,1000000000	1,0666666667	3,0667
4	1	0,0666666667	1,1333333333	3,1333
5	1	0,0476190476	1,1809523810	3,1810
6	-1	-0,0357142857	1,1452380952	3,1452
7	-1	-0,0277777778	1,1174603175	3,1175
8	1	0,0222222222	1,1396825397	3,1397
9	1	0,0181818182	1,1578643579	3,1579
10	-1	-0,0151515152	1,1427128427	3,1427
11	-1	-0,0128205128	1,1298923299	3,1299
12	1	0,0109890110	1,1408813409	3,1409
13	1	0,0095238095	1,1504051504	3,1504
14	-1	-0,0083333333	1,1420718171	3,1421
15	-1	-0,0073529412	1,1347188759	3,1347
16	1	0,0065359477	1,1412548236	3,1413
17	1	0,0058479532	1,1471027768	3,1471
18	-1	-0,0052631579	1,1418396189	3,1418

4.

Informace a jejich posouzení



OBSAH KAPITOLY

Po prostudování kapitoly *Informace a jejich posouzení* byste měli umět rozvíjet následující digitální dovednosti:

- základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami)
- kopírování vybraných buněk
- využití funkce SUMA pro buňky, které spolu nesousedí
- využití dvou listů tabulky
- kreslení obrazců, vkládání textu do obrázku a kopírování objektů v textovém editoru

Uvedené digitální dovednosti budou využity v následujících matematických tématech:

- planimetrie
- kombinatorika
- pravděpodobnost
- statistika
- výroková logika

AKTIVITY PRO ROZVOJ UVEDENÝCH DOVEDNOSTÍ

4.1 Hra IOTA

Tematické okruhy: kombinatorika, výroková logika

Digitální technologie: textový editor, např. Word

Konkrétní digitální dovednosti: kreslení obrazců, vkládání textu do obrázku, kopírování objektů

Připravené soubory: 4_1_*Pravidla_IOTA*

Zadání aktivity

Hra *IOTA* je karetní hra, kterou navrhl G. Mackles v roce 2012. Jedná se o abstraktní strategickou hru, ve které se pomocí čtvercových kartiček vytváří požadované vzory. Hra je vhodná pro 2 až 4 hráče. Jedna hra trvá přibližně 30 minut. *IOTA* je hra, která hráče nutí myslet strategicky a kreativně.

Na kartičkách hry *IOTA* jsou znázorněny tři vlastnosti: barva (modrá, zelená, žlutá, červená), tvar (kříž, čtverec, kruh, trojúhelník) a číslo (1, 2, 3, 4). Čtyři kartičky z hracího balíčku vidíte na následujícím obrázku (jejich vzhled je oproti originálu mírně upraven).

Úkol 1

Kolik různých kartiček obsahuje balíček hry *IOTA*, jestliže jsou na nich znázorněny všechny možnosti využití čtyř barev, tvarů a číslic?

Úkol 2

V textovém editoru zakreslete všechny čtvercové kartičky hry *IOTA* včetně dvou tzv. divokých kartiček (viz pravidla hry). Připravenou sadu vytiskněte a rozstříhejte na jednotlivé kartičky.

Při kreslení kartiček podle výše uvedeného vzoru vhodně využívejte kopírování objektů, aby vaše práce byla efektivní. Divokou kartičku vytvořte podle svého návrhu, obě divoké kartičky musí být stejné.

Úkol 3

Ze hry IOTA vybírejte postupně čtveřice kartiček tak, aby splňovaly uvedené podmínky:

1. **Ve čtveřici mají všechny obrazce žlutou barvu a všechna čísla jsou sudá.**
2. **Ve čtveřici žádný obrazec není stejný co do tvaru a barvy, ale všechna čísla jsou stejná.**
3. **Ve čtveřici mají dva žluté obrazce stejná čísla, dva červené obrazce mají různý tvar i čísla.**

Ve dvojici si navzájem zadávejte své vlastní podmínky pro výběr čtveřice karet.

Úkol 4

Zahrajte si hru *IOTA* podle pravidel, která naleznete v souboru *4_1_Pravidla_IOTA*.

Pro hru *IOTA* budete potřebovat dostatek místa na herní ploše!

Komentované řešení

Úkol 1

Hra IOTA obsahuje 64 kartiček, na kterých jsou znázorněny všechny možnosti využití čtyř barev, tvarů a číslic.

Úkol 3

1. Jedna z možností, kdy ve čtveřici mají všechny obrazce žlutou barvu a všechna čísla jsou sudá.

2. Jedna z možností, kdy ve čtveřici žádný obrazec není stejný co do tvaru a barvy, ale všechna čísla jsou stejná.

3. Jedna z možností, kdy ve čtveřici mají dva žluté obrazce stejná čísla, dva červené obrazce mají různý tvar i čísla.

4.2 On the Road

Tematické okruhy: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Digitální technologie: tabulkový procesor (např. Excel), aplikace Mapy.cz

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk); kopírování vybraných buněk; funkce SUMA pro buňky, které spolu nesousedí

Připravené soubory: *4_2_On_The_Road_Res*

Zadání aktivity

Bratři Petr a Pavel se domluvili, že o prázdninách navštíví své čtyři kamarádky. Eliška bydlí v Praze, Simča v Liberci, Julča v Brně a Věrka v Českých Budějovicích. Protože si ve všech čtyřech městech mohou půjčit auto v pobočkách stejné autopůjčovny za stejných podmínek, rozhodli se, že o tom, kde svou cestu začnou, rozhodne nejmenší celkový počet kilometrů, které během cesty „od města k městu a zpět“ ujedou.

Úkol 1

Kolika různými způsoby mohou Petr s Pavlem realizovat plánovanou cestu? Vypište do tabulky všechny možnosti podle následujícího vzoru (první řádek v tabulce znamená, že cestu začnou v Praze, potom pojedou do Liberce, následují České Budějovice, Brno a poté se vrátí do Prahy).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		P	L	ČB	B	
3		P	L	B	ČB	
4		P	B	L	ČB	

Úkol 2

V připravené tabulce vyznačte modře všechny možnosti, které splňují následující podmínku, kterou si Petr s Pavlem dodatečně stanovili: při cestě navštíví Brno a z něj pojedou do Liberce nebo navštíví Liberec a z něj pojedou do Brna. Jak se situace změní při současném splnění další podmínky: cestu zahájí v Praze, nebo posledním městem před návratem budou České Budějovice? Trasy odpovídající oběma podmínkám očíslujte (následující obrázek).

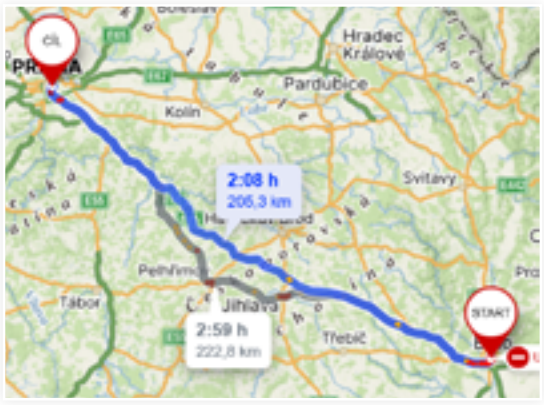
	A	B	C	D	E	F
1						
2		P	L	ČB	B	
3		P	L	B	ČB	1
4		P	B	L	ČB	2
5		P	B	ČB	L	

Úkol 3

Aby Petr s Pavlem vybrali možnost, při které ujedou mezi městy nejmenší počet kilometrů, zjistili si v aplikaci Mapy.cz minimální trasy mezi zadanými městy a údaje zaokrouhlené na celá čísla zapsali do tabulky podle následujícího vzoru. Připravte si takovou tabulku i vy.

	G	H	I	J	K	L
1						
2						
3			Praha	Liberec	Brno	Č. Budějovice
4		Praha				
5		Liberec				
6		Brno				
7		Č. Budějovice				

Odhad délky trasy záleží na zvolených místech, mezi kterými vzdálenost měříte. Předpokládejte, že půjčovna aut je vždy u hlavního nádraží. Jestliže vám aplikace nabídne několik možností, vyberte tu nejkratší. Vaše měření se může mírně lišit od následujících ukázek dvou měření.



Úkol 4

Do třetí tabulky si bratři zapsali zjištěné délky tras v jednotlivých možnostech a určili délku celé cesty.

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1										
2	Možnost	Délka 1. trasy		Délka 2. trasy		Délka 3. trasy		Návrat		Součet
3	1	PL		LB		BČB		ČBP		
4	2	PB		BL		LČB		ČBP		

Která možnost vám vyšla jako nejkratší, jestliže jste postupovali jako Petr a Pavel?

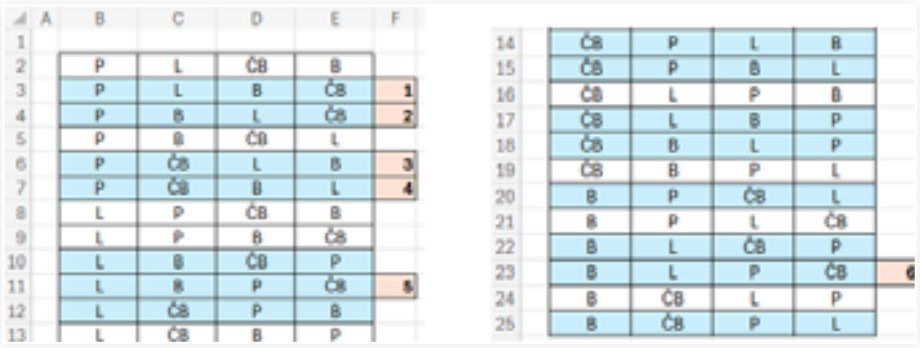
Jak by se situace změnila, kdyby autopůjčovna požadovala, aby bylo při cestě najeto alespoň 800 kilometrů?

Co by asi při možnosti několika stejně dlouhých cest rozhodlo o výběru nejlepšího pořadí měst?

Komentované řešení

Úkol 1–2

Všechny možnosti realizace plánované cesty jsou přehledně zapsány v tabulce, kterou naleznete v souboru *4_2_On_The_Road_Res* a na následujícím obrázku.

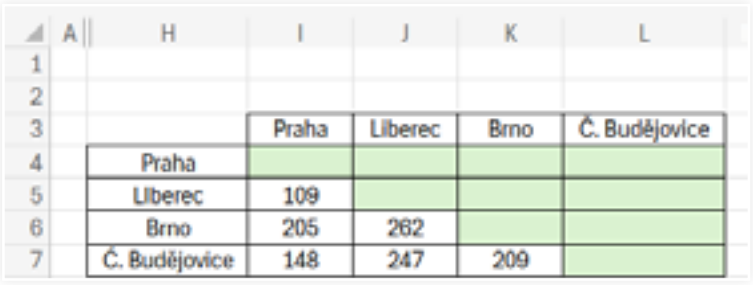


2	P	L	ČB	B	
3	P	L	B	ČB	1
4	P	B	L	ČB	2
5	P	B	ČB	L	
6	P	ČB	L	B	3
7	P	ČB	B	L	4
8	L	P	ČB	B	
9	L	P	B	ČB	
10	L	B	ČB	P	
11	L	B	P	ČB	5
12	L	ČB	P	B	
13	L	ČB	B	P	

14	ČB	P	L	B	
15	ČB	P	B	L	
16	ČB	L	P	B	
17	ČB	L	B	P	
18	ČB	B	L	P	
19	ČB	B	P	L	
20	B	P	ČB	L	
21	B	P	L	ČB	
22	B	L	ČB	P	
23	B	L	P	ČB	6
24	B	ČB	L	P	
25	B	ČB	P	L	

Úkol 3–4

Uvedené výsledky ve třetí tabulce jsou provázány s následující tabulkou zjištěných vzdáleností jednotlivých tras. Vaše měření se může mírně lišit.



	Praha	Liberec	Brno	Č. Budějovice
Praha				
Liberec	109			
Brno	205	262		
Č. Budějovice	148	247	209	

Možnost	Délka 1. trasy		Délka 2. trasy		Délka 3. trasy		Návrat		Součet
1	PL	109	LB	262	BČB	209	ČBP	148	728
2	PB	205	BL	262	LČB	247	ČBP	148	862
3	PČB	148	ČBL	247	LB	262	BP	205	862
4	PČB	148	ČBB	209	BL	262	LP	109	728
5	LB	262	BP	205	PČB	148	ČBL	247	862
6	BL	262	LP	109	PČB	148	ČBB	209	728

Pro uvedenou tabulku vzdáleností by vyhovovaly tři možnosti nejkratší cesty (728 km)., které obě začínají v Praze.

Kdyby autopůjčovna požadovala, aby bylo při cestě najeto alespoň 800 kilometrů, vyhovovaly by tři trasy (862 km). Dvě začínají v Praze a jedna v Liberci. Rozhodnout by mohlo, ve kterém městě vlastně Petr s Pavlem bydlí. Tato informace však v textu uvedena není.

4.3 Realitní agent

Tematické okruhy: planimetrie

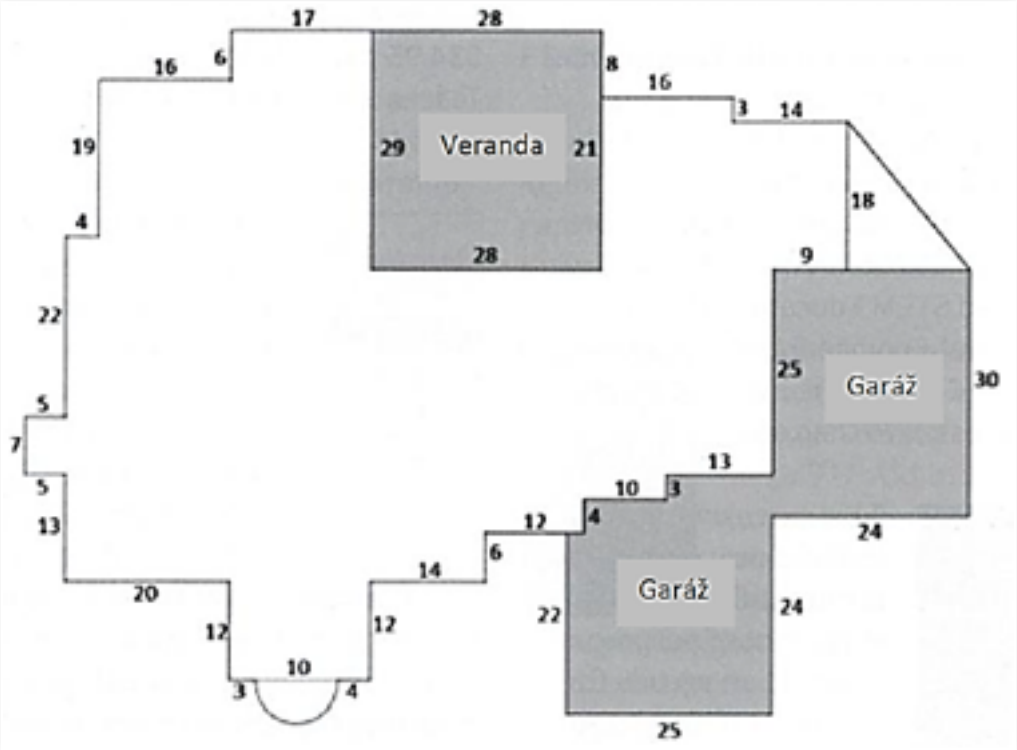
Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk), kopírování vybraných buněk, výpočty obsahu geometrických obrazců, využití dvou listů tabulky

Připravené soubory: *4_3_Realitní_agent_Res*

Zadání aktivity

Honza a Zuzka navštívili s rodiči strýčka Maxe, který bydlí v Los Angeles a je realitním agentem. Jednou večer je požádal o pomoc. Potřeboval by vypočítat skutečnou obytnou plochu domu, která je vyznačena na přiloženém plánku (do plochy domu nepatří garáže ani veranda – na plánku vyznačeno šedě). Výpočet musí být přesný a ověřitelný, protože na základě obytné plochy stanoví Max prodejní cenu domu. Údaje na plánku jsou uvedeny ve stopách.



Úkol 1

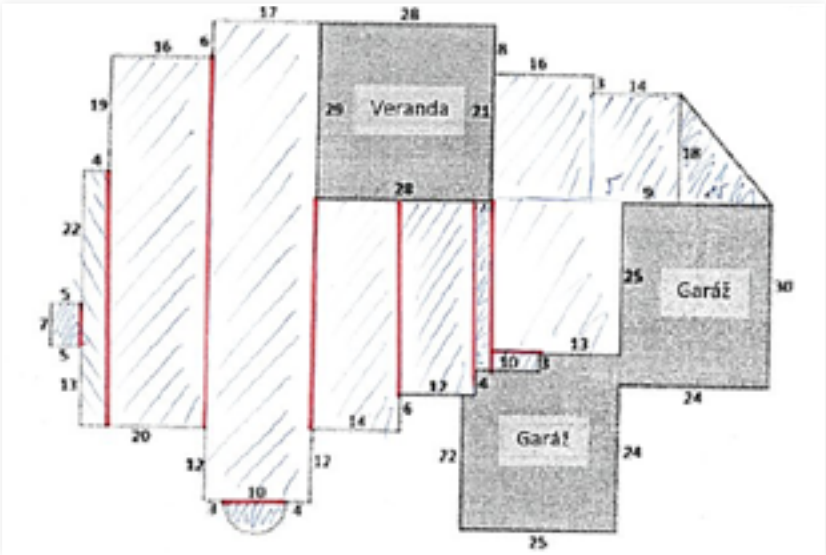
Honza a Zuzka se rozhodli, že si obytnou plochu rozdělí na geometrické obrazce, jejichž obsah lehce spočítají. Protože útvarů možná bude hodně, rozhodli se, že si připraví jednoduchou tabulku. Záhlaví tabulky si zvolí stejně, rozdělení na obrazce mohou mít různé. Útvarů by však nemělo být víc než 15. Vypočtené údaje zobrazí v tabulce na dvě desetinná místa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Obdélník nebo čtverec				Trojúhelník				Půlkruh			Obytná plocha
2		1. rozměr	2. rozměr	Obsah		Základna	Výška	Obsah		Poloměr	Obsah		
3													

Na prvním listu v tabulkovém procesoru vytvořte a vyplňte tabulku podle Honzova rozdělení. Při vyplňování rozměrů s výhodou využijte možnost sčítání čísel v dané buňce, např. po zadání vzorce =15+4+3 se v buňce objeví hodnota součtu 22.

Úkol 2

Na druhém listu vytvořte a vyplňte tabulku podle rozdělení, které navrhla Zuzka. Velikosti obytných ploch podle Honzova rozdělení a podle rozdělení Zuzky vám musí vyjít stejně.



Úkol 3

Zjištěnou hodnotu obytné plochy převeďte na metry čtvereční a zaokrouhlete na celé číslo. Porovnejte tento údaj s rozlohou bytu, ve kterém žijete.

Komentované řešení

Úkol 1–3

Oba odhady sourozenců najdete v souboru *4_3_Realitni_agent_Res.*

Tabulka pro Honzovo rozdělení:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Obdélník nebo čtverec				Trojúhelník				Půlkruh			Obytná plocha
2		1. rozměr	2. rozměr	Obsah		Základna	Výška	Obsah		Poloměr	Obsah		4805,27
3	1	19,00	16,00	304,00		15,00	18,00	135,00		5,00	39,27		
4	2	25,00	17,00	425,00									
5	3	37,00	42,00	1554,00									
6	4	7,00	5,00	35,00									
7	5	12,00	17,00	204,00									
8	6	14,00	6,00	84,00									
9	7	26,00	32,00	832,00									
10	8	10,00	28,00	280,00									
11	9	13,00	25,00	325,00									
12	10	16,00	21,00	336,00									
13	11	14,00	18,00	252,00									
14	12			0,00									
15	13			0,00									
16	14			0,00									
17	15			0,00									

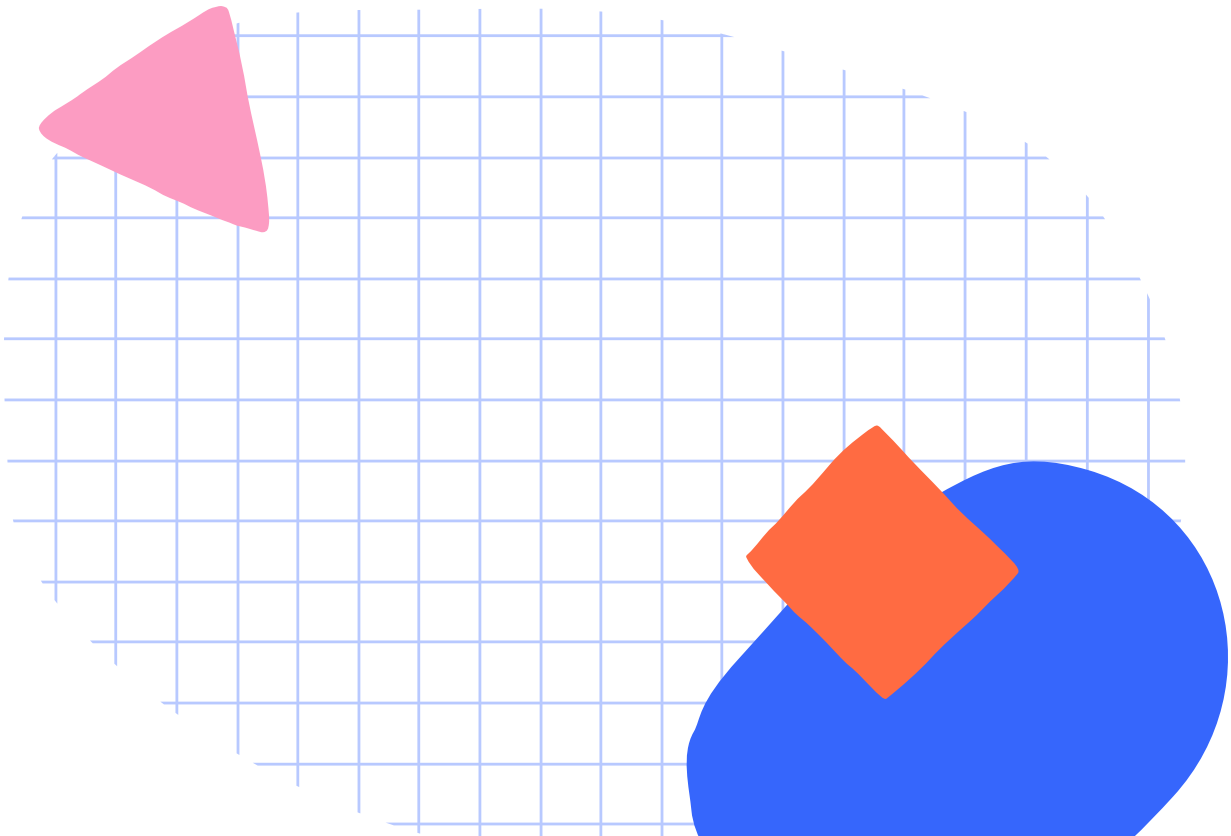
Tabulka pro rozdělení Zuzky:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Obdélník nebo čtverec				Trojúhelník				Půlkruh			Obytná plocha
2		1. rozměr	2. rozměr	Obsah		Základna	Výška	Obsah		Poloměr	Obsah		4805,27
3	1	5,00	7,00	35,00		15,00	18,00	135,00		5,00	39,27		
4	2	4,00	42,00	168,00									
5	3	16,00	61,00	976,00									
6	4	17,00	79,00	1343,00									
7	5	14,00	38,00	532,00									
8	6	12,00	32,00	384,00									
9	7	2,00	28,00	56,00									
10	8	8,00	3,00	24,00									
11	9	14,00	18,00	252,00									
12	10	16,00	21,00	336,00									
13	11	25,00	21,00	525,00									
14	12			0,00									
15	13			0,00									
16	14			0,00									
17	15			0,00									

Zajímavé informace o velikosti bytů naleznete na stránce https://financnezdravejsi.csas.cz/cs/bydlim-chytre/kupujete-byt-hledate-pronajem-zjistete-kolik-m2-by-mel-mit.

5.

Modelování reálných situací



OBSAH KAPITOLY

Po prostudování kapitoly *Modelování reálných situací* byste měli umět rozvíjet následující digitální dovednosti:

- základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování a vybarvení buněk, početní operace s číselnými hodnotami)
- zápis vzorců pomocí absolutního i relativního adresování
- využívání funkce ABS a ODMOCNINA i logické funkce KDYŽ
- vložení bodového grafu, spojnice trendu a její rovnice
- znázorňování geometrických útvarů (bod, úsečka, kružnice, trojúhelník…) v programu GeoGebra
- kreslení podle pokynů (algoritmizace)

Uvedené digitální dovednosti budou využity v následujících matematických tématech:

- řešení soustavy rovnic
- funkce
- planimetrie
- stereometrie
- statistika
- matematické modelování

AKTIVITY PRO ROZVOJ UVEDENÝCH DOVEDNOSTÍ

5.1 Nákupní vozíky

Tematické okruhy: funkce, řešení soustavy rovnic

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk), zápis vzorce (relativní adresace), vložení bodového grafu, spojnice trendu a její rovnice

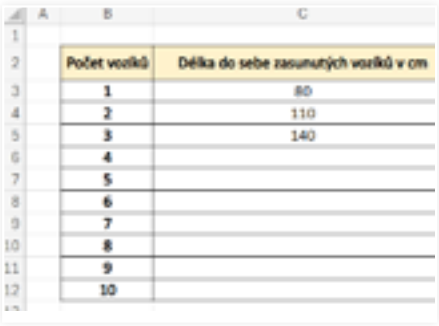
Připravené soubory: *5_1_Nakupni_voziky_Res*

Zadání aktivity

Martina si v internetovém časopisu *Bydlíme útulně* přečetla zajímavý článek o nákupních vozících. Zaujalo ji, že nákupní vozík vznikl v roce 1937 v USA. Jeho vynálezce S. Goldman chtěl, aby zákazníci nemuseli nosit těžké výrobky po jeho prodejně, a měli tak lepší zážitek z nakupování. Vytvořil prototyp vozíku spojením dvou košíků, skládací židle a koleček. Původně se obával odmítnutí, ale díky promyšlenému marketingu a analýze trhu se vozík stal populárním. V dnešní době se setkáte i s inovativními designy, které zahrnují například držáky na nápoje, elektronické seznamy nákupů, nebo dokonce solární nabíjecí stanice pro mobilní telefony.

Úkol 1

Na obrázku vidíte nový design nákupních vozíků. Délka vozíku je 80 cm, 30 centimetrů vozíku se může zasunout do předchozího vozíku, a tak se při jejich skladování ušetří místo.



Počet vozíků	Délka do sebe zasunutých vozíků v cm
1	80
2	110
3	140
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Připravte si tabulku, která vám pomůže zkoumat celkovou délku do sebe zasunutých dvou až deseti vozíků.

Počet vozíků vyplňte roztažením vzoru v buňkách B3, B4 do požadovaného počtu 10. Do buňky C3 zapište délku vozíku, do C4 zapište vzorec, který určí délku dvou zasunutých vozíků. Zvolte ho tak, abyste ho mohli zkopírovat do C5 a následně i do dalších buněk ve sloupci C.

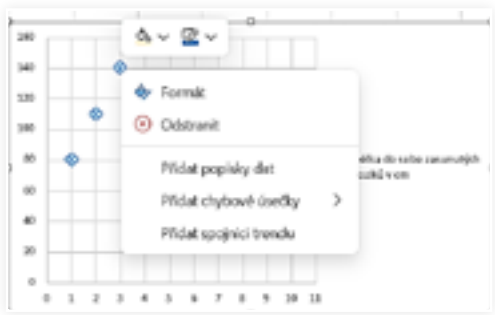
Úkol 2

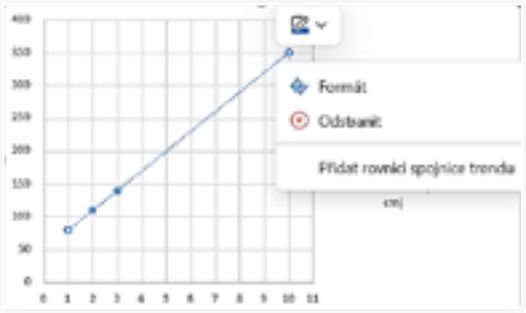
Pro vytvořenou tabulku vložte na stejný list bodový graf. Za předpokladu, že lze zobrazenými body proložit přímku, určete výpočtem předpis lineární funkce, která je zadána těmito body.

Upravte formát osy *x* tak, aby na ose byly vyznačeny hodnoty 1, 2, 3, ..., 10, 11. Odstraňte název grafu a legendu umístěte vpravo.

Úkol 3

Do vytvořeného grafu přidejte spojnici trendu a její rovnici. Zkontrolujte, zda vaše výpočty byly správné.



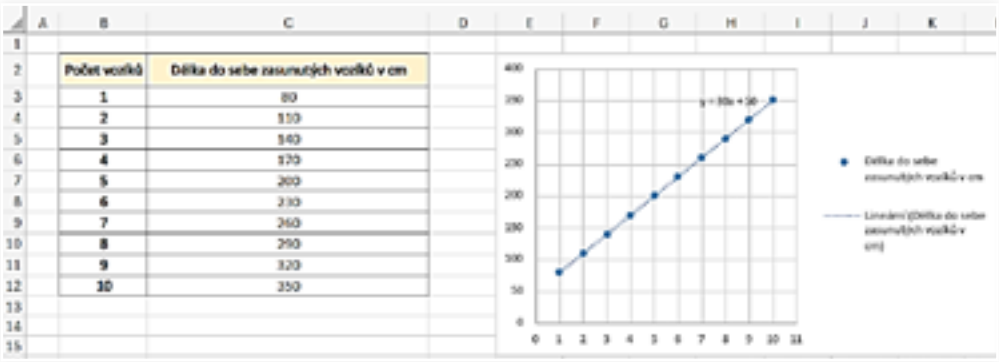


Tabulku vyplňte pro další počty vozíků zkopírováním vzorce v buňce C5. Všimněte si, že přidané body leží v grafu na spojnici trendu.

Komentované řešení

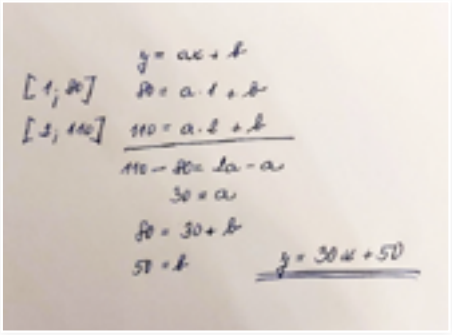
Úkol 1–3

Řešení naleznete v souboru *5_1_Nakupni_voziky_Res* a na následujícím obrázku.



Počet vozíků	Délka do sebe zasunutých vozíků v cm
1	80
2	110
3	140
4	170
5	200
6	230
7	260
8	290
9	320
10	350

Žákovské řešení: určení předpisu lineární funkce, která je zadána dvěma danými body.



5.2 Poznáš značku auta podle loga?

Tematické okruhy: planimetrie

Digitální technologie: program pro interaktivní geometrii, např. GeoGebra

Konkrétní digitální dovednosti: znázorňování geometrických útvarů (bod, úsečka, kružnice, trojúhelník…), práce podle pokynů (algoritmizace)

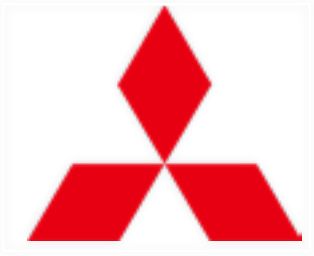
Připravené soubory: *5_2_Poznas_znacku_1*, *5_2_Poznas_znacku_2*, *5_2_Poznas_znacku_3*, *5_2_Poznas_znacku_4*, *5_2_Poznas_znacku_5*

Zadání aktivity

Určitě se vám už stalo, že jste se zahleděli na znak (logo) automobilky na kapotě nějakého vozu. Možná vás napadlo: co vlastně ten znak znamená? Například v logu české automobilky *Škoda,* které je jen s malými změnami používané od roku 1923, znamená šíp pokrok, křídla volnost a „oko“ preciznost. Zelená barva se v logu objevila po revoluci v roce 1990 a znamenala nový začátek. Dnes se však používá logo stříbrné (jako u většiny ostatních automobilových značek).

Loga mají za úkol upoutat pozornost. Tomu napomáhá např. originalita, symetrie a jednoduchost návrhu. V následujících dvou úkolech si zakreslíme loga značek

Mitsubishi a *Mercedes-Benz* v programu GeoGebra. Budeme postupovat podle zadaného algoritmu, který příkaz po příkazu popisuje, jaký geometrický útvar máme v nákresně vyznačit.



Úkol 1

Název automobilové značky *Mitsubishi* je odvozen ze dvou japonských slov. První z nich znamená tři, což je důvodem trojitého vzoru v logu společnosti. Druhé je označení pro kosočtverec nebo pro tvar diamantu. V programu GeoGebra zakreslete logo *Mitsubishi* podle následujících pokynů:

1. Zakreslete bod *A* [0; 0]. Sestrojte kružnici *k* se středem v bodě *A* a poloměrem 4. Sestrojte kružnici *m* se středem *B* [0; 4] a poloměrem 4. Průsečíky kružnic označte zleva *D* a *E*.

Sestrojte kružnici *l* se středem *C* [0; -4] a poloměrem 4. Průsečíky této kružnice a kružnice *k* označte zleva *F* a *G*.

2. Sestrojte trojúhelník *FGB* a trojúhelník *DEC*. Modrou barvou vyznačte všechny průsečíky stran těchto trojúhelníků.
3. Teď už máte zakresleny všechny body, které jsou vrcholy tří „diamantů“. Zakreslete logo, jehož střed leží v počátku soustavy souřadnic.

Úkol 2

Tři cípy hvězdy v logu značky *Mercedes-Benz* symbolizují tři elementy – zemi, vzduch a moře. Tuto hvězdu nakreslil v roce 1909 majitel firmy do dopisu svojí manželce a připsal, že jednoho dne bude tato hvězda zářit nad jejich továrnami. V programu GeoGebra zakreslete logo *Mercedes-Benz* podle následujících pokynů:

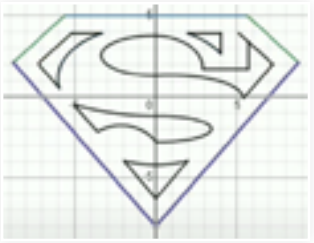
1. Začněte stejně jako v předcházejícím úkolu. Zakreslete bod *A* [0; 0]. Sestrojte kružnici *k* se středem v bodě *A* a poloměrem 4. Sestrojte kružnici *m* se středem *B* [0; 4] a poloměrem 4. Průsečíky kružnic označte zleva *D* a *E*.

Sestrojte kružnici *l* se středem *C* [0; -4] a poloměrem 4. Průsečíky této kružnice a kružnice *k* označte zleva *F* a *G*.

2. Zakreslete bod *H* [0; 2], střed úsečky *DH* označte *I*, střed úsečky *HE* označte *J*.

Průsečík úseček *DG* a *FJ* označte *K*. Průsečík úsečky *FJ* a kružnice *l* označte *L*. Průsečík úseček *FE* a *IG* označte *M*. Průsečík úsečky *IG* a kružnice *l* označte *N*. Průsečík úseček *LG* a *FN* označte *O*.

3. Teď už máte zakresleny všechny body, které jsou vrcholy tří cípů hvězdy. Zakreslete logo, jehož střed leží v počátku soustavy souřadnic.



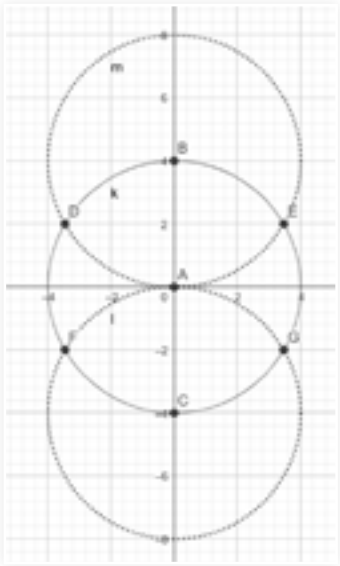
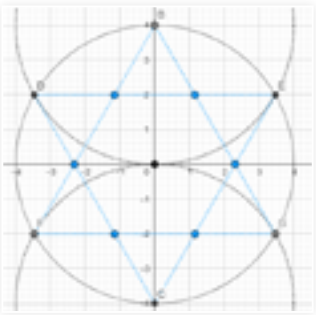
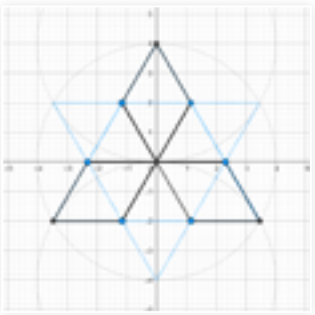
Úkol 3

Prohlédněte si na internetu loga známých značek, inspirujte se jimi při návrhu vašeho osobního loga. Nezapomeňte, že logo má být zajímavé, zapamatovatelné a jednoduché (mohou to být např. vaše iniciály).

Komentované řešení

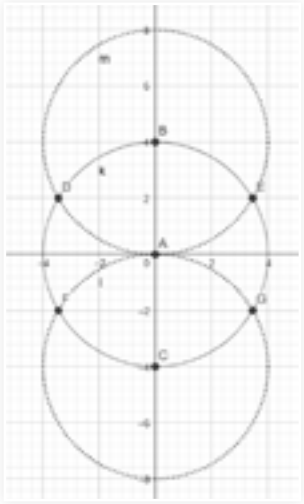
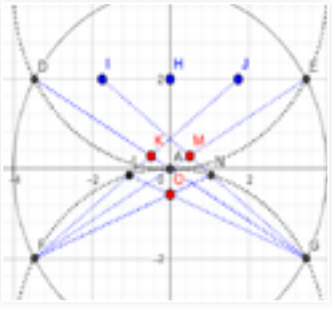
Úkol 1

Všechny útvary zakreslené podle uvedených pokynů vidíte na následujících obrázcích a v souborech *5_2_Poznas_znacku_1*, *5_2_Poznas_znacku_2*, *5_2_Poznas_znacku_3*.

Úkol 2

Všechny útvary zakreslené podle uvedených pokynů vidíte na následujících obrázcích a v souborech *5_2_Poznas_znacku_1*, *5_2_Poznas_znacku_4*, *5_2_Poznas_znacku_5*.

5.3 Pět jezer a jeden lom

Tematické okruhy: statistika, stereometrie, matematické modelování

Digitální technologie: tabulkový procesor, např. Excel

Konkrétní digitální dovednosti: základní dovednosti při tvorbě tabulky (zápis čísla nebo textu do buňky, orámování buněk), zadávání vzorců (absolutní a relativní adresace), převod jednotek, funkce ABS a ODMOCNINA, logická funkce KDYŽ

Připravené soubory: *5_3_Pět_jezer_Res*

Zadání aktivity

Na Šumavě se nachází osm ledovcových jezer. Na české straně najdeme Černé jezero, Čertovo jezero, Plešné jezero, Prášilské jezero a jezero Laka. Za hranicemi v Německu leží Roklanské jezero, Velké a Malé Javorské jezero. Na Wikipedii můžeme pro šumavská jezera najít zajímavé číselné údaje (např. rozlohu, hloubku, plochu a objem). Na základě těchto údajů budeme šumavská jezera porovnávat a modelovat jejich 3D tvar „pod hladinou“.

Úkol 1

Podle níže uvedeného vzoru vytvořte tabulku údajů z Wikipedie pro pět jezer, která leží na české straně Šumavy. Ve sloupci D připravte vzorec pro převod hektarů na kilometry čtvereční, ve sloupci F převeďte metry na kilometry a ve sloupci H metry krychlové na kilometry krychlové. Ve sloupci I modelujte objem jezera pomocí objemu kvádru, ve sloupci K pomocí jehlanu. Pro každý z těchto modelů určete odchylku vzhledem k objemu, který je uveden na Wikipedii.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Plocha		Maximální hloubka		Objem vody	
2		Jezero	ha	km^2	m	km	m^3	km^3
3		Černé	18,805000	0,188050	40,600000	0,040600	287800,000000	0,000288
4		Čertovo	10,531000	0,105310	37,000000	0,037000	1520000,000000	0,001520

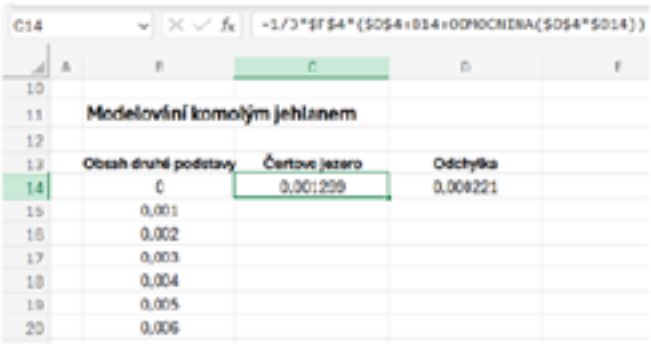
G	H	I	J	K	L
Objem vody		Modelování			
m^3	km^3	Hranol	Odchylka	Jehlan	Odchylka
287800,000000	0,000288	0,007635	0,007347	0,002545	0,002257
1520000,000000	0,001520	0,003896	0,002376	0,001299	0,000221

Jestliže je zjištěná odchylka pro hranol menší než odchylka pro jehlan, nechte vypsat do sloupce M *Hranol je lepší model*, v opačném případě zapište *Jehlan je lepší model*.

Úkol 2

Podle následujících vzorů vytvořte tabulku, která bude modelovat objem Čertova jezera pomocí komolého jehlanu. Obsah jedné (horní) podstavy je dán rozlohou jezera, obsahy druhé (dolní) podstavy zvolte dle vzoru. Zjistěte, pro který zvolený obsah druhé

podstavy je odchylka objemu komolého jehlanu od hodnoty objemu uvedeného na Wikipedii nejmenší. Podobně prozkoumejte i jezero Prášilské.



	A	B	C	D	E
10					
11		Modelování komolým jehlanem			
12					
13		Obsah druhé podstavy	Čertovo jezero	Odchylka	
14		0	0,001259	0,000221	
15		0,001			
16		0,002			
17		0,003			
18		0,004			
19		0,005			
20		0,006			

Úkol 3

Velká Amerika (český Grand Canyon) je bývalý vápencový lom, který je v současné době zatopen do maximální výšky deseti metrů. Koupání v lomu je přísně zakázané, úžasná je vyhlídka z pěšiny, která vede kolem lomu. Na Wikipedii byste se dozvěděli, že plocha zatopeného lomu je 0,020 86 km² a objem je 151 500 m³.

Pod vytvořenou tabulku s údaji pro pět šumavských jezer přidejte řádek s údaji pro lom Amerika a zjistěte, zda by bylo lepší k modelování 3D tvaru použít jehlan nebo hranol.

Komentované řešení

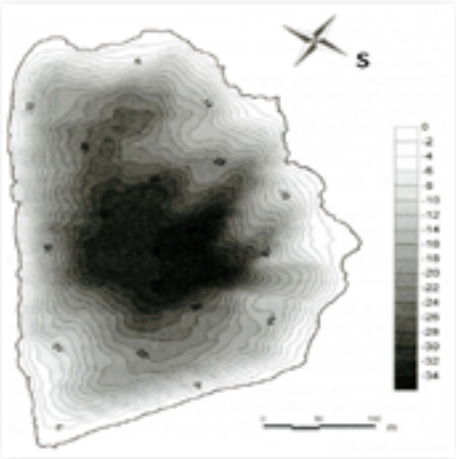
Úkol 1–2

Všechny výsledky, které jste získali podle uvedených pokynů, vidíte na následujících obrázcích a v souborech *5_3_Pet_jezer_Res*.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Plocha		Maximální hloubka		Objem vody	
2		Jezero	ha	km²	m	km	m³	km³
3		Černé	18,805000	0,188050	40,600000	0,040600	287900,000000	0,000288
4		Čertovo	10,531000	0,105310	37,000000	0,037000	1520000,000000	0,001520
5		Plešné	6,716200	0,067162	18,300000	0,018300	617000,000000	0,000617
6		Roklanské	4,615300	0,046153	13,200000	0,013200	180000,000000	0,000180
7		Prášilské	3,811900	0,038119	15,300000	0,015000	270000,000000	0,000270
8								
9		Lom Amerika		0,02086		0,01	151500	0,000152

I	J	K	L	M	N
Modelování					
Hranol	Odchylka	Jehlan	Odchylka		
0,007635	0,007347	0,002545	0,002257	Jehlan je lepší model	
0,003896	0,003376	0,001299	0,000221	Jehlan je lepší model	
0,001229	0,000612	0,000410	0,000207	Jehlan je lepší model	
0,000609	0,000429	0,000203	0,000023	Jehlan je lepší model	
0,000572	0,000302	0,000191	0,000079	Jehlan je lepší model	
0,000209	0,000057	0,000070	0,000082	Hranol je lepší model	

	A	B	C	D	E	F	G	H
11		Modelování komolým jehlanem						
12								
13		Obsah druhé podstavy	Čertovo jezero	Odchylka		Obsah druhé podstavy	Prášilské jezero	Odchylka
14		0	0,001299	0,000221		0	0,000191	0,000079
15		0,001	0,001438	0,000082		0,001	0,000226	0,000044
16		0,002	0,001502	0,000018		0,002	0,000244	0,000026
17		0,003	0,001555	0,000035		0,003	0,000259	0,000011
18		0,004	0,001601	0,000081		0,004	0,000272	0,000002
19		0,005	0,001643	0,000123		0,005	0,000285	0,000015
20		0,006	0,001683	0,000163		0,006	0,000296	0,000026



Na obrázku, kterému se říká batymetrická mapa, vidíte rozložení naměřených hloubek Čertova jezera z roku 2003. K měření byly použity sonary, které zjišťovaly hloubku vody ve 2746 bodových měřeních. Obrázek poskytuje velmi dobrou představu o správnosti 3D modelu Černého jezera pomocí komolého jehlanu.

Úkol 3

Výsledky pro lom Amerika vidíte na následujícím obrázku, na kterém je využita tzv. možnost *skrýt sloupce* C až H. Vzhledem k tomu, že vodní plocha vznikla zatopením lomu, nemělo by vás překvapit, že pro 3D model je vhodnější hranol.

	A	B	I	J	K	L	M	N
1			Modelování					
2		Jezero	Hranol	Odchylka	Jehlan	Odchylka		
3		Černé	0,007635	0,007347	0,002545	0,002257	Jehlan je lepší model	
4		Čertovo	0,003896	0,002376	0,001299	0,000221	Jehlan je lepší model	
5		Plešné	0,001229	0,000612	0,000410	0,000207	Jehlan je lepší model	
6		Prášilské	0,000572	0,000302	0,000191	0,000079	Jehlan je lepší model	
7		Laka	0,000088	0,000048	0,000029	0,000011	Jehlan je lepší model	
8								
9		Lom Amerika	0,000209	0,000057	0,000070	0,000082	Hranol je lepší model	

Využité zdroje

1.2 Sedmé nebe

Ilustrativní obrázek https://pixabay.com/cs/illustrations/mraky-duha-o%C4%8Di-%C5%99asy-usm%C4%9Bj-se-7728399/

1.3 Tabulka jako důkaz

Ilustrativní obrázek číselných množin https://pixabay.com/cs/illustrations/platit-%C4%8D%C3%ADsla-nekone%C4%8Dno-%C4%8D%C3%ADslice-937884/

Úvodní text z knihy *1089 a další parádní čísla* od Davida Achesona (ISBN 978-80-7675-141-5)

2.4 Galerie pro matematiky

Fotografie galerie je dostupná na https://media.istockphoto.com/photos/bright-gallery-museum-room-picture-id1075521588?k=20&m=1075521588&s=170667a&w=0&h=7B0hnDvbYgln2OHPzuG25oCItS5uBODP1si9dWA8fpM=

3.1 Shut the Box

Obrázek dřevěné krabičky pro hru Shut the Box https://www.rapala.com/us_en/rapala-shut-the-box#rdl

3.2 Odhad čísla Pí

Ilustrace uměleckého ztvárnění cifer čísla π https://www.etsy.com/listing/970142234/first-1000-digits-of-pi-no-1-a4a3-size

5.1 Nákupní vozíky

Informace o nákupních vozících https://www.freepik.com/free-photo/row-shopping-trolleys-with-red-blue-handles_3260598.htm#fromView=search&page=2&position=29&uuid=73cf6b46-b199-495e-845e-061981a3d5f4&query=shopping+cart+2in1

5.2 Poznáš značku auta podle loga?

https://www.skoda-storyboard.com/cs/skoda-3d-standard-logo_srgb-2/

Informace o logu *Mercedes-Benz* https://www.novinky.cz/clanek/auto-tricipa-hvezda-slavi-vyroci-110-let-logo-mercedesu-mohlo-byt-docela-jine-40287884

https://cs.wikipedia.org/wiki/Mercedes-Benz#/media/Soubor:Mercedes-Benz_Star_2022.svg

Informace o logu *Mitsubishi* https://fabrikbrands.com/branding-matters/logofile/mitsubishi-logo-history-symbol-meaning-and-evolution/

https://cs.wikipedia.org/wiki/Mitsubishi#/media/Soubor:Mitsubishi_logo.svg

5.3 Pět jezer a jeden lom

Čertovo jezero https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:%C4%8Certovo_jezero#/media/File:Certovo_jezero_2022.jpg

Lom Amerika https://commons.wikimedia.org/w/index.php?search=lom+amerika&title=Special%3AMediaSearch&type=image

Obrázek z článku *Limnologická studie Čertova jezera* autorů J. Kocum a B. Janský https://geografie.cz/media/pdf/geo_2005110030152.pdf

Rozvoj digitálních kompetencí v matematice
Metodická příručka pro středoškolské učitele

Autor:
RNDr. Eva Zelendová, Ph.D.

Grafická úprava:
Michaela Houdková

Jazyková korektura:
Jana Rušinová

Národní pedagogický institut České republiky, Praha, 2025

Aktuální informace o publikacích Národního pedagogického institutu České republiky najdete na webových stránkách www.npi.cz

Dílo podléhá licenci Creative Commons CC BY-SA 4.0
Uveďte původ. Zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní.

www.npi.cz