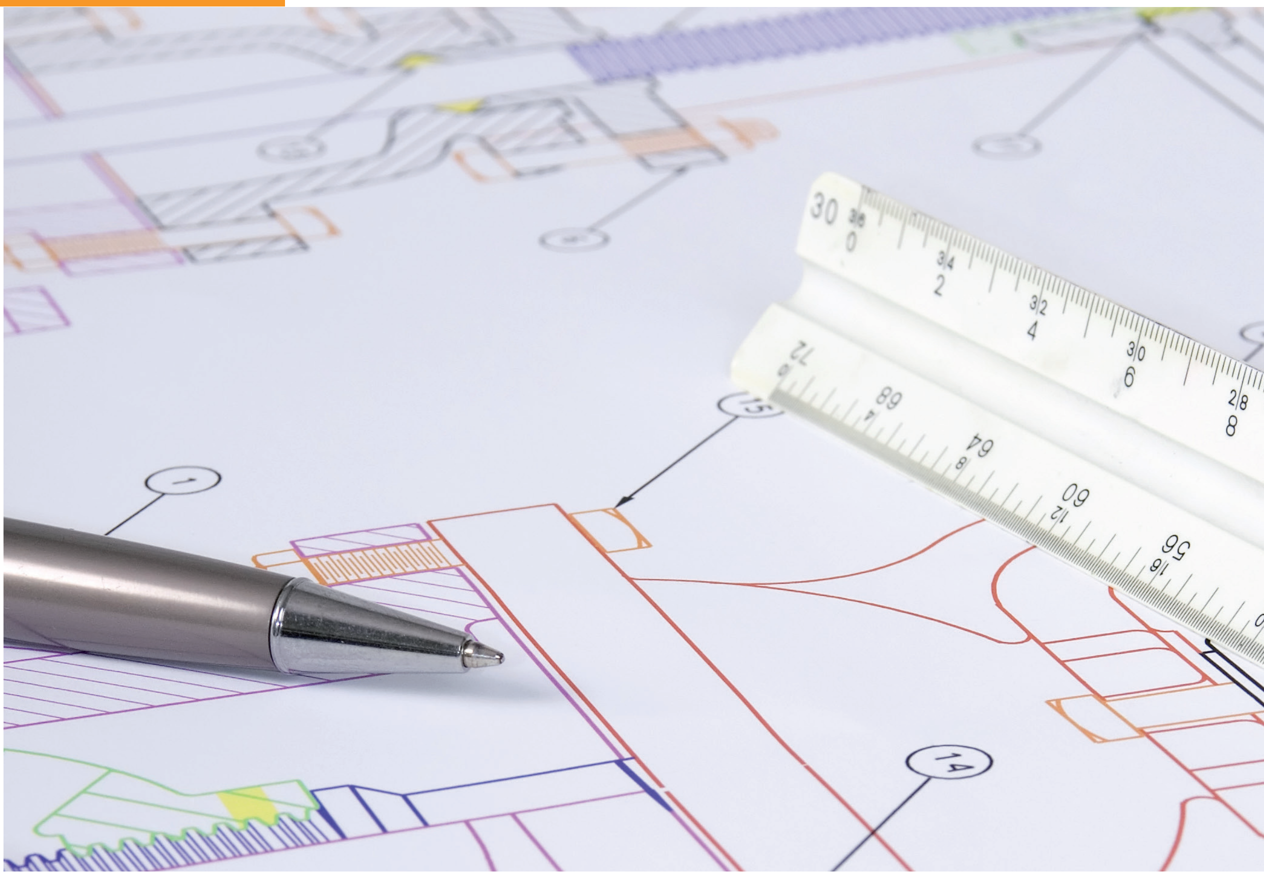
Národní ústav pro vzdělávání



MATEMATIKA

Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory s elektrotechnickým základem

Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek, Josef Bobek, Zuzana Bobková, František Procházka, Miroslav Staněk

MATEMATIKA

Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory s elektrotechnickým základem

Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek,
Josef Bobek, Zuzana Bobková,
František Procházka, Miroslav Staněk

SBÍRKA ŘEŠENÝCH ÚLOH Z APLIKOVANÉ MATEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

pro technické obory s elektrotechnickým základem

Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek, Josef Bobek, Zuzana Bobková, František Procházka, Miroslav Staněk

Obsah

	Úvod	3
1	Aritmetika (Operace s čísly)	5
2	Finanční matematika	10
3	Algebra (Výrazy s proměnnými)	16
4	Funkce	22
5	Rovnice a nerovnice	34
6	Planimetrie	44
7	Stereometrie	50
8	Analytická geometrie v rovině	54
9	Posloupnosti	69
10	Kombinatorika	74
11	Pravděpodobnost	83
12	Statistika a práce s daty	91
13	Komplexní čísla	98
14	Seznam tabulek, grafů a obrázků	103
14.1	Seznam tabulek	103
14.2	Seznam grafů	103
14.3	Seznam obrázků	104
15	Použité zdroje	106
15.1	Tištěné dokumenty	106
15.2	Elektronické dokumenty	108

Úvod

Tato sbírka je součástí materiálů vydaných NÚV k podpoře výuky matematiky na středních a vyšších odborných školách. Navazuje na obdobně koncipovanou Sbírku řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy se strojírenským základem, uveřejněnou v říjnu 2018 na www.nuv.cz.

Sbírku tvoří soubor řešených úloh propojujících přímo učivo z matematiky s učivem elektrotechnických odborných předmětů, doplněný o aplikované úlohy obecnějšího zaměření, které je dle našich zkušeností vhodné zařadit i do výuky v oborech s elektrotechnickým základem. Takové úlohy lze nalézt i v uvedené sbírce pro obory se strojírenským základem; pro usnadnění práce učitelům jsme jejich výběr převzali i do sbírky pro obory s elektrotechnickým základem.

Vhodně volené úlohy umožňují ukázat učitelům význam a možnosti uplatnění probíraného učiva při řešení úloh v odborných předmětech a v praxi. Jsme si vědomi, že některé úlohy se významně přimykají k elektrotechnice a pro některé učitele mohou být věcně příliš vzdálené od jejich profese. Věříme však, že i oni naleznou ve sbírce úlohy, které mohou bez obav zařadit do výuky. Metodicky zpracovaná řešení vybraných úloh umožňují i učitelům matematiky bez technického vzdělání vysvětlit žákům podstatu úloh a jejich matematická řešení. Rovněž učitelům odborných předmětů umožňuje sbírka poznat metody a způsoby matematického řešení úloh, které uplatňují při výuce odborných předmětů. Žáci mohou úlohy, zejména ty řešené, využít k vlastnímu studiu a procvičování. Úlohy lze využít i v návaznosti na miniprojekty z matematiky, jejichž metodiku již NÚV na svých stránkách publikoval.[1]

Úlohy svým zaměřením a různou obtížností umožní využití v oborech E, H, M/L0, L5 i na vyšších odborných školách, obtížnost úloh jsme však neoznačili, neboť naše zkušenosti ukazují, že obtížnost úlohy je mnohdy subjektivní záležitostí. O zařazení konkrétní úlohy do výuky rozhodne učitel na základě svých zkušeností a znalosti žáků.

U úloh je uveden výsledek řešení, u vybraných úloh je uveden i postup řešení.

Sbírka je sestavena z vlastních úloh a výběru úloh ze starších, nyní již hůře dostupných publikací, které jsme někdy aktualizovali tak, že je lze dobře využít i v současnosti.

[1] viz http://www.nuv.cz/uploads/projekty_Aplikovane_ulohy_v_matematice.pdf

Na webových stránkách NÚV http://www.nuv.cz/t/opatreni-metodika je pro učitele i ostatní zájemce zřízena konzultační služba. Sbírku nepovažujeme za uzavřené dílo, naopak předpokládáme, že ji budeme doplňovat a přizpůsobovat na základě zkušeností uživatelů a vývoje výuky matematiky ve středním odborném vzdělávání. Rádi přivítáme informace o zkušenostech s využitím sbírky i návrhy na úpravy a doplnění úloh, zejména v souvislosti s vývojem výuky a oborů vzdělání.

V Praze 30. 9. 2019

Za autorský kolektiv:
Miroslav Bartošek, Josef Bobek, Zuzana Bobková, František Procházka, Miroslav Staněk

1 Aritmetika (Operace s čísly)

1. Hnací řemenice elektromotoru má průměr 80 mm a má 1200 otáček za minutu. Jaký průměr musí mít hnané kolo, aby měla 600 otáček za minutu. Výsledek udejte v centimetrech.

   Řešení:

   $n_1 \,.\, d_1 = n_2 \,.\, d_2$, odtud $d_2 = 16$ cm

2. Transformátor má v primárním vinutí $N_1 = 1000$ závitů a je na něj přivedeno napětí $U_1 = 4{,}4$ kV. Kolik závitů musí mít sekundární vinutí, abychom z něj mohli odebírat napětí $U_2 = 230$ V?

   Řešení:

   $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$, odtud $N_2 = 52$ závitů

3. K pájení se používá slitina kovů, která má nízkou teplotu tání. Pro pájení v elektrotechnice se využívá slitina cínu a olova, která obsahuje 60 % cínu a 40 % olova. Kolik pájecí slitiny vyrobíme z 2 400 g olova? Výsledek udejte v gramech i kilogramech.

   Řešení:

   6 000 g = 6 kg

4. Účinnost elektromotorů je podle normy měřena jako poměr mezi mechanickým výkonem motoru na výstupu a elektrickým příkonem na vstupu a je uváděna v procentech. Jak velký je příkon elektromotoru typu IE3 (vysoká účinnost), jestliže je jeho výkon 374,4 kW a účinnost 96 %?

   Řešení:

   390 kW

5. Ze skladu se vydalo 895 součástek a ještě jich tam zůstalo 2 763. Vypočítejte, kolik součástek bylo původně ve skladě.

   Řešení:

   3 658 součástek

6. Ve skladu měli ráno 359 kg zinku. Během dne vydali dopoledne nejdříve 47 kg a odpoledne 38 kg zinku. Kolik zinku ve skladu zůstalo?

Řešení:

274 kg

7. Kabel má délku 50 m a je složen z 5 měděných drátů o průřezu 4 mm^2 a izolace. Kolik kilogramů mědi je v kabelu, jestliže jeden drát o průřezu 4 mm^2 délky 50 m váží 1,8 kg?

Řešení:

9 kg

8. Provozovna má příkon 470,5 kW. Kolik kWh spotřebuje za $4\frac{1}{5}$ h?

Řešení:

$x = 470{,}5$ kW . 4,2 h = 1976,1 kWh

9. K zhotovení měkké pájky bylo použito 16,125 kg cínu a 10,75 kg olova.
   a) Jaká je hmotnost pájky?
   b) Kolik % cínu a kolik % olova je obsaženo v pájce?
   c) V jakém poměru jsou obsaženy oba kovy v pájce?

Řešení:

Měkká pájka je slitinou uvedených kovů. Slitina vznikne smísením roztavených kovů, proto *m* je součtem hmotností smísených kovů. Odtud:

a) $m = 26{,}875$ kg

b) 60 % cínu, 40 % olova

c) 3 : 2

10. Rotor elektromotoru se otočí za *t* sekund *n*-krát. Kolikrát se otočí za hodinu?

Řešení:

1 h = 3 600 s, počet otáček za hodinu $\frac{3\,600n}{t}$

11. Jeden motor vykoná za minutu 80 otáček a druhý 100 otáček. V jakém poměru jsou otáčky obou motorů?

Řešení:

4 : 5, resp. 5 : 4 (záleží na tom, v jakém pořadí motory srovnáváme)

12. Jak velký by byl průřez drátu trolejbusového vedení, kterým má procházet proud 625 A, počítá-li se se zatížením 2 A na 1 mm^2?

Řešení:

2 A na 1 mm^2, 625 A na $S = \dfrac{625\ \mathrm{A} . 1\ \mathrm{mm}^2}{2\ \mathrm{A}} = 312{,}5\ \mathrm{mm}^2$

13. Žárovka s příkonem 40 W spotřebovala 160 Wh elektrické energie. Jak dlouho svítila?

Řešení:

160 Wh : 40 W = 4 h

14. Elektrický odpor prodlužovací šňůry o délce 2 m je 0,2 Ω. Na každé tři metry délky vodiče se připočítává odpor 0,1 Ω. Kolik bude odpor 50 m prodlužovací šňůry?

Řešení:

50 m = 2 m + 48 m. Odpor bude: 0,2 Ω + 16 . 0,1 Ω = 1,8 Ω

15. Elektrický motor má účinnost 80 %. Vypočítejte příkon motoru, jestliže ztráty motoru jsou 4 kW. Účinnost v procentech je poměr užitečného výkonu (příkonu zmenšeného o ztráty) k příkonu motoru vynásobený stem.

Řešení:

4 kW tvoří 20 % příkonu, tedy 100 % příkonu bude 20 kW.

16. Dělník vyrobil v prvním týdnu 2000 součástek, z toho byla 2 % vadných. V druhém týdnu vyrobil 3000 součástek, z toho bylo 5 % vadných. Kolik procent vadných součástek měl dělník za čtrnáct dnů práce?

Řešení:

3,8 %

17. Kolikrát větší je délka vodiče, tolikrát větší je jeho elektrický odpor. Vypočítejte délku vodiče, aby se jeho odpor zvětšil desetkrát, jestliže při délce 2 m má odpor 1 Ω.

Řešení:

$$\frac{l}{10\,\Omega} = \frac{2\ \mathrm{m}}{1\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad l = 20\ \mathrm{m}$$

18. Kolikrát větší je délka dvou rovnoběžných vodičů pod proudem, tolikrát větší magnetická síla mezi nimi působí. Vypočítejte, jakou silou jsou přitahovány dva vodiče délky 20 m, jestliže přitažlivá síla na jednom metru vodičů je 10^{-2} N.

Řešení:

$$\frac{F}{20\ \mathrm{m}} = \frac{10^{-2}\ \mathrm{N}}{1\ \mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad F = 0{,}2\ \mathrm{N}$$

19. Kolikrát větší proud danou dobu protéká elektrolytem, tolikrát větší hmotnost kovu se vyloučí na elektrodě při elektrolýze. Určete množství vyloučeného kovu za 24 h při proudu 200 A, jestliže při proudu 10 kA se vyloučilo za 24 h 80 kg kovu.

Řešení:

$$\frac{m}{200\ \mathrm{A}} = \frac{80\ \mathrm{kg}}{10\ 000\ \mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad m = 1{,}6\ \mathrm{kg}$$

20. Kolikrát větší je odpor spotřebiče, tolikrát menší proud jím při nezměněném napětí protéká. Vypočítejte proud spotřebičem při jeho odporu 10 kΩ, jestliže víte, že při odporu 30 kΩ protéká proud 20 mA.

Řešení:

$I\ .\ 10\ \mathrm{k\Omega} = 20\ \mathrm{mA}\ .\ 30\ \mathrm{k\Omega} \quad \Rightarrow \quad I = 60\ \mathrm{mA}$

21. Kolikrát větší je počet závitů na cívce transformátoru, tolikrát menší elektrický proud jí protéká. Vypočítejte počet závitů cívky, má-li jí protékat proud 2 A, jestliže při 1000 závitech protéká cívkou proud 100 mA.

Řešení:

$N\ .\ 2\ \mathrm{A} = 1\ 000\ .\ 0{,}1\ \mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad N = 50$ závitů

22. Převeďte 1 kWh na J, jestliže 1 Ws je 1 J.

Řešení:

1 kWh = 1 000 Wh = 1 000 W . 3 600 s = 3,6 MJ

23. Určete koeficient pro převod J na eV, jestliže 1 eV je 1,6 . 10^{-19} J.

Řešení:

$$\frac{1\ \mathrm{J}}{1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{J}} = 0{,}625.10^{19}$$

24. Určete, kolik pF má 10μF.

Řešení:

10 μF =10.10^{-6} F=10. 10^{-6}. 10^{12} pF = 10^{7} pF

25. Střídavé napětí ve veřejné síti má efektivní hodnotu 230 V. Určete maximální hodnotu napětí ze vztahu $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Řešení:

U_m = 325 V

26. Převeďte jednotky:

a)	30 mA	=	μA
b)	0,5 MW	=	kW
c)	300 kHz	=	MHz
d)	5,1 μT	=	mT

Řešení:

a)	30 mA	= 30 000 μA
b)	0,5 MW	= 500 kW
c)	300 kHz	= 0,3 MHz
d)	5,1 μT	= 0,0051 mT

2 Finanční matematika

1. Za práci při elektroinstalaci dostali dva elektrikáři 32 000 Kč. Tuto částku si rozdělili v poměru 1 : 3. Jakou částku dostal každý z dělníků? Jak si částku rozdělili v procentech?

   Řešení:

   První dělník dostal 8 000 Kč, což je 25 %, druhý dělník dostal 24 000 Kč, což je 75 %.

2. Krokový motor s přírubou NEMA 17 stojí 499 Kč bez DPH (21 %). Kolik tento motor stojí s DPH? Cenu uveďte v celých korunách.

   Řešení:

   604 Kč

3. 150 m silového kabelu pro pevné uložení stojí bez DPH (21 %) 3 099 Kč. Kolik stojí 1 m tohoto kabelu s DPH.

   Řešení:

   25 Kč

4. Za kolik let klesne hodnota zařízení na výrobu elektrosoučástek na méně než desetinu vstupní hodnoty, jestliže ročně odepisujeme 18 % z hodnoty zařízení z předchozího roku?

   Řešení:

   $$a_n = a_0\left(1-\frac{p}{100}\right)^n \quad \Rightarrow \quad n = 11{,}6 \quad \Rightarrow \quad 12 \text{ let}$$

5. Řemeslník si u banky uložil do rezervy 20 000 Kč. Po pěti letech měl na účtu 25 000 Kč. Kolik procent byl roční úrok, jestliže daň z úroku byla 15 %?

   Řešení:

   $$25\,000 = 20\,000.\left(1+\frac{0{,}85p}{100}\right)^5 \quad \Rightarrow \quad p = 5{,}4\ \%$$

6. Vypočítejte, kolik dostane elektrikář za zapojení 18 zásuvek, bylo-li zjištěno, že 5 zásuvek zapojí průměrně za 1/3 hodiny, a hodinová mzda je 180 Kč.

   Řešení:

   216 Kč

7. Vstupní hodnota elektrického zařízení klesla po 6 letech používání na 64 % původní hodnoty. Tím se původní hodnota snížila o 315 000 Kč. Jaká byla vstupní hodnota nového zařízení a kolik činila po 6 letech používání.

   Řešení:

   Nové zařízení mělo hodnotu 875 000 Kč, po 6 letech 560 000 Kč.

8. Řemeslník měl roční základ daně 550 000 Kč a zaplatil daň 82 500 Kč. Kolik % činí sazba daně?

   Řešení:

   15 %

9. Při přípravě výroby nového výrobku bylo nutné zakoupit 3 stroje v pořizovacích cenách 532 000 Kč, 1 153 000 Kč a 110 500 Kč a na stavební investice vynaložit 3 460 700 Kč. Kolik činily celkem investiční náklady?

   Řešení:

   5 256 200 Kč

10. První společník vložil do společnosti 1 400 000 Kč, druhý společník 600 000 Kč. Výtěžek 1 900 000 Kč si rozdělili v poměru vkladu. Kolik dostal každý?

    Řešení:

    1 330 000 Kč, 570 000 Kč

11. V jednom roce prodal podnikatel výrobky za 78 000 Kč, v následujícím roce za 135 000 Kč. O kolik % mu stoupl prodej?

    Řešení:

    o 73 %

12. Cena polotovarů a hotových výrobků jistého druhu je v poměru 2 : 5. Je-li cena polotovarů 340 Kč/kg, jaká bude cena hotových výrobků?

    Řešení:

    $\frac{2}{5} = \frac{340}{\text{x}} \quad \Rightarrow \quad x = 850$ Kč/kg

13. Ve velkoobchodě mají 250 chladniček v ceně 7 850 Kč. Prodalo se 95 chladniček.

    a) Kolik Kč velkoobchod utržil?

b) Kolik % chladniček se prodalo?
c) Jaká bude cena chladničky, jestliže ji sníží o 15 %?

Řešení:

a) 745 750 Kč
b) 38 %
c) 6 672,50 Kč

14. Obchod má na skladě sortiment v celkové hodnotě 350 000 Kč. V týdnu se prodalo zboží za 140 000 Kč.
    a) Kolik se prodalo kusů zboží, jestliže jeden kus stál 3 500 Kč?
    b) Kolik % zboží zůstalo na skladě?
    c) Kolik kusů zboží zůstane ve skladě, jestliže se zásoby sníží o 75 %?

    Řešení:

    a) 40 kusů
    b) 60 %
    c) 25 kusů z původního počtu kusů, dojde-li ke snížení před prodejem; 15 kusů, dojde-li ke snížení po prodeji.

15. Zaměstnanec zkrátil čas potřebný k výrobě součástky elektrospotřebiče ze 16 minut na 4 minuty. Jeho mzda stoupla z 88 Kč za hodinu na 120 Kč za hodinu. O kolik procent se zlevnila výroba jedné součástky?

    Řešení:

    Vypočteme v obou případech počet součástek elektrospotřebičů za jednotku času, např. 1 hodinu, a vypočteme mzdu za 1 součástku elektrospotřebiče v obou případech. Porovnáním zjistíme, že se snížily mzdové náklady a výroba jedné součástky spotřebiče zlevnila o 65,9 %.

16. Měsíční výdělek Petra se zvýšil o 30 %. O kolik procent vzrostla jeho kupní síla při nezměněných cenách?

    Řešení:

    Zvýší-li se měsíční výdělek o 30 %, zvýší se stejně i Petrova kupní síla, tedy o 30 %.

17. Petrův výdělek se nezměnil, ale ceny veškerého zboží byly sníženy o 30 %. O kolik procent se zvýšila jeho kupní síla v tomto případě?

Řešení:

Jestliže se Petrův výdělek nezmění, ale ceny veškerého zboží se sníží o 30 %, nezvýší se jeho kupní síla o 30 %, ale více. Je-li například možné koupit za 1 korunu jeden předmět v ceně 1 koruny, bude možné po snížení jeho ceny na 70 haléřů (o 30 %) koupit za 1 korunu 100/70 = 10/7 předmětu, tj. o 3/7 čili asi o 43 % více.

18. Majitel prodejny elektrospotřebičů poskytl na elektrospotřebič 10% slevu z původně stanovené ceny, přitom však měl stále ještě osm procent zisku. Kolikaprocentní zisk chtěl mít majitel prodejny původně při prodeji tohoto elektrospotřebiče?

Řešení:

Nesprávná úvaha: 10 % + 8 % = 18 %

Prodej s 10% slevou vynesl 8 % zisku. To znamená, že 90 % stanovené ceny činilo 108 % z té ceny, kterou majitel prodejny za elektrospotřebič zaplatil dodavateli.

$\dfrac{90\,\%}{100\,\%} = \dfrac{108\,\%}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 120\ \%$. Původní předpokládaný zisk byl 20 %.

19. O kolik procent se zvýšila produktivita dělníkovy práce, když zkrátil dobu potřebnou k vyrobení součástky o p %?

Řešení:

Nesprávná úvaha: produktivita práce se zvýší o tolik procent, o kolik se zkrátí čas na zhotovení výrobku.

Předpokládejme, že na zhotovení 1 výrobku je zapotřebí 1 hodina. Zkrátí-li se doba zhotovení výrobku o p %, bude kratší o $0{,}01p$ hodiny. Doba potřebná na výrobu jednoho výrobku pak bude $(1 - 0{,}01p)$ hodiny.

Počet výrobků vyrobených za 1 hodinu: $\dfrac{1}{1-\dfrac{p}{100}} = \dfrac{100}{100-p}$

Za 1 hodinu se vyrobí o $\dfrac{100}{100-p} - 1 = \dfrac{p}{100-p}$ výrobků více, což je $\dfrac{100}{100-p}\,\%$.

20. Jeden rok se cena materiálu 100 Kč/kg snížila o 10 % a druhý rok se tato snížená cena o 10 % zvýšila. Kolik teď stojí 1 kg materiálu a o kolik procent se liší od ceny před dvěma roky?

Řešení:

První rok cena 100 Kč/kg klesla o 10 % na 90 Kč/kg. Druhý rok se cena 90 Kč/kg zvýšila o 10 % na 99 Kč/kg. Tedy pokles je o 1 Kč/kg, což je pokles o 1 % z původní ceny.

21. Paní Nováková si uložila u banky na termínovaný účet s výpovědní lhůtou jeden rok částku 50 000 Kč. Vypočítejte:
    a) úrok před zdaněním, je-li úroková míra 0,6 % p. a;
    b) úrok po zdanění 15 %;
    c) jak velkou částku paní Nováková obdrží.

    Řešení:

    a) 300 Kč
    b) 255 Kč
    c) 50 255 Kč

22. Podnikatel si u banky uložil částku 150 000 Kč. Po roce mu banka sdělila, že po přičtení úroku vložená částka vzrostla na 150 750 Kč. Vypočítejte, jaká byla úroková míra a jakou částku podnikatel obdržel po zdanění 15 %. Banka zaokrouhluje vyplacené částky dolů.

    Řešení:

    Úroková míra: 0,5 %
    Vyplacená částka: 150 637 Kč (přesná částka před zaokrouhlením: 150 637,50 Kč)

23. Vstupní hodnota zařízení dílny pro elektrikáře byla 250 000 Kč. Jaká bude jeho hodnota za 10 let, jestliže se ročně znehodnotí opotřebováním o 20 %?

    Řešení:

    $a_{10} = a_0 \,.\, (1 - r)^{10} \quad \Rightarrow \quad a_{10} = 250\,000 \text{ Kč} \,.\, 0{,}8^{10} = 26\,843{,}55 \text{ Kč}$

24. Stroj ztrácí opotřebováním každý rok 4,5 % ze své vstupní hodnoty. Za jakou dobu klesne jeho vstupní hodnota na polovinu?

    Řešení: $\frac{1}{2}a_0 = a_0\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n, \; n = \frac{\log 0{,}5}{\log(1 - 0{,}045)} \approx 15$

25. Ze vstupní hodnoty stroje se každý rok odepisuje 4,5 % na opotřebení. Vypočítejte, jakou hodnotu bude mít stroj po 10 letech, jestliže jeho vstupní hodnota byla 100 000 Kč.

Řešení:

$n_{10} = 100\,000 \,.\, (1 - 0{,}045)^{10} = 100\,000 \,.\, 0{,}955^{10} = 63\,101$ Kč

3 Algebra (Výrazy s proměnnými)

1. Dvojice paralelně zapojených spotřebičů (rezistorů) o odporech R_1 a R_2 má celkový odpor $R = 30\ \Omega$. Vypočítejte odpor R_2, pokud víte, že $R_1 = 40\ \Omega$.

   K řešení využijte vztah: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

   Řešení:

   $R_2 = 120\ \Omega$

2. Určete odpor R spotřebiče, prochází-li jím při napětí $U = 12$ V proud o velikosti $I = 100$ mA. Využijte vztah $U = R\ .\ I$.

   Řešení:

   $R = 120\ \Omega$

3. Jak velkým elektrickým nábojem Q se nabije kondenzátor o kapacitě $C = 50\ \mu$F, připojíme-li jej na napětí $U = 230$ V. Využijte vztah $Q = C\ .\ U$.

   Řešení:

   $Q = 0{,}0115$ C

4. Elektrický vařič pro napětí 230 V má dvě topná tělesa, první o příkonu $P_1 = 500$ W a odporu $R_1 = 105{,}8\ \Omega$ a druhé $P_2 = 1\ 000$ W a $R_2 = 52{,}9\ \Omega$. Vypočítejte celkový odpor a příkon vařiče, zapojíme-li tělesa paralelně.

   K řešení využijte vztahy: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $P = \frac{U^2}{R}$.

   Řešení:

   $R = 35{,}3\ \Omega$, $P = 1500$ W

5. Dvojicí paralelních vodičů protéká celkový proud $I = 4{,}5$ A. Jedna větev má odpor $R_1 = 60\ \Omega$ a druhá větev $R_2 = 90\ \Omega$. Určete proudy I_1, I_2 tekoucí v jednotlivých větvích.

   K řešení využijte vztahy: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $U = R\ .\ I$, $U = U_1 = U_2$, $I = I_1 + I_2$.

   Řešení:

   $R = 36\ \Omega$, $U = 162$ V, $I_1 = 2{,}7$ A, $I_2 = 1{,}8$ A

6. Určete rezonanční frekvenci obvodu s kondenzátorem s kapacitou $C = 300$ pF a cívkou o indukčnosti $L = 0{,}5$ mH, jestliže víte, že platí vztah $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Výsledek uveďte v kHz a zaokrouhlete ho na celé číslo.

   Řešení:

   $f = 411$ kHz

7. Hodnota materiálu spotřebovaného na lince při letování plošných spojů byla x Kč za hodinu. Zmenšením odpadu se zmenšila o 200,- Kč za hodinu.
   a) Kolik činila úspora při y pracovních hodinách?
   b) Jaká byla pak hodnota materiálu spotřebovaného za y pracovních hodin?

   Řešení:

   Úspora za 1 h je 200,- Kč, při y hodinách je úspora 200y Kč; původní spotřeba $(x \,.\, y)$ Kč, po úspoře je $(x \,.\, y - 200y)$ Kč.

8. Zaměstnankyně pracovala x směn a v jedné směně zpracovala 15 kg materiálu. Dále pracovala y směn, kde v každé směně zpracovala 40 kg materiálu. Kolik materiálu zpracovala celkem?

   Řešení:

   V x směnách zpracovala $15x$ kg materiálu, v y směnách $40y$ kg materiálu, celkem zpracovala $(15x+40y)$ kg materiálu.

9. Na jištění každého stroje jsou potřeba 3 jističe.
   a) Kolik jističů bude třeba na jištění deseti strojů?
   b) Zapište, kolik jističů bude třeba na jištění s strojů?
   c) Kolik strojů je možné jistit pomocí 25 jističů?
   d) Kolik strojů je možné jistit j jističi?
   e) Vyjádřete nerovnost, která musí platit pro x spotřebičů, jestliže máme k dispozici j jističů.

   Řešení:

   a) 30 jističů
   b) $3s$ jističů
   c) $25 : 3 = 8{,}66 \;\Rightarrow\;$ 8 strojů (1 jistič zbude)
   d) celá část zlomku $\dfrac{j}{3}$
   e) $x \le \dfrac{j}{3}$

10. Na sestavení jednoduchého obvodu jsou potřeba 3 cívky a 5 kondenzátorů.
   a) Kolik cívek a kondenzátorů bude třeba na výrobu 200 obvodů?
   b) Kolik cívek a kondenzátorů bude třeba na výrobu n obvodů?
   c) Kolik obvodů je možné vyrobit z 400 cívek a 600 kondenzátorů?
   d) Zapište, kolik obvodů lze vyrobit z c cívek a k kondenzátorů.
   e) Kolik obvodů bylo vyrobeno, jestliže bylo použito přesně o 50 cívek víc než kondenzátorů?

   Řešení:

   a) 600 cívek a 1 000 kondenzátorů
   b) $3n$ cívek a $5n$ kondenzátorů
   c) 120
   d) minimum z celých částí zlomků $\frac{c}{3}$ a $\frac{k}{5}$
   e) 25

11. Výrobní operace trvá m minut.
   a) Jak dlouho trvá provedení 100 těchto operací? Kolik je to hodin?
   b) Kolik těchto operací se provede za jednu hodinu?
   c) Kolik těchto operací se provede za jednu osmihodinovou směnu?
   d) Kolik těchto operací by se provedlo za jednu osmihodinovou směnu, kdyby se doba trvání operace zkrátila na polovinu?

   Řešení:

   a) $100m$ minut, $\frac{100m}{60} = \frac{10m}{6}$ hodin
   b) $\frac{60}{m}$
   c) $8.\frac{60}{m}$
   d) $2.8.\frac{60}{m}$

12. Stroj vyrobí za 1 hodinu s součástek.
   a) Kolik součástek vyrobí za osmihodinovou směnu?
   b) Kolik součástek vyrobí za 1 minutu?
   c) Jak dlouho trvá vyrobit 1 součástku?
   d) Kolik součástek by vyrobil stroj za osmihodinovou směnu navíc, kdyby byl rychlejší a za hodinu vyrobil o dvě součástky navíc?

e) Jak dlouho by stroj vyráběl jednu součástku, kdyby za hodinu vyrobil o dvě součástky navíc?

Řešení:

a) $8s$

b) $\frac{s}{60}$

c) $\frac{1}{s}$ hodin

d) $2 . 8 = 16$

e) $\frac{1}{s+2}$

13. První zaměstnanec vyrobí za hodinu a výrobků a druhý vyrobí za hodinu b výrobků; $a > b$. Zapište, o kolik výrobků víc vyrobí první zaměstnanec za osmihodinovou směnu než druhý?

Řešení:

$8.(a - b)$

14. Pan Novák vyrobí za osmihodinovou směnu m výrobků. Všechny výrobky prodá a za každý utrží c korun. Provozní náklady na výrobu jednoho výrobku jsou n korun. Vyjádřete hrubý zisk pana Nováka za hodinu práce.

Řešení:

$$\frac{(c-n).m}{8}$$

15. Ze tří kovů byla utvořena slitina k výrobě vodičů, a to z m kg kovu po a Kč za 1 kg, z n kg kovu o b Kč za 1 kg dražšího než kov předchozí a z třetího kovu, dvakrát dražšího než druhý kov. Slitiny bylo p kg. Zapište vztahy, které vyplývají z textu úlohy a určete, jaká je celková cena slitiny. Určete cenu slitiny, jestliže $m = 20$ kg, $n = 30$ kg, $p = 100$ kg, $a = 100$ Kč a $b = 200$ Kč.

Řešení:

Tabulka 1. Algebra – příklad 15 – řešení

	cena za 1 kg	**hmotnost**	**cena za kov celkem**
1. kov	a Kč	m kg	m kg . a Kč
2. kov	$(a + b)$ Kč	n kg	n kg . $(a + b)$ Kč
3. kov	2. $(a + b)$ Kč	$[p - (m + n)]$ kg	$[p - (m + n)]$ kg . 2. $(a + b)$ Kč
celkem:	m kg . a Kč + n kg . $(a + b)$ Kč + $[p - (m + n)]$ kg . 2. $(a + b)$ Kč = 41 000 Kč		

16. Jaké jsou otáčky řemenice asynchronního elektromotoru, jestliže obvodová rychlost listu kotoučové pily o průměru 500 mm je 32 m/s a otáčky se klínovými řemeny převádějí z elektromotoru na kotouč v poměru 2 : 1. Pro obvodovou rychlost platí vztah $v = \pi \,.\, d \,.\, f$, kde d je průměr řemenice a f je frekvence otáčení.

Řešení:

frekvence listu kotoučové pily: $f = \dfrac{v}{\pi . d} = 20{,}37$ Hz

frekvence řemenice: $f' = 2 \,.\, f = 40{,}74$ Hz $= 40{,}74$ ot/s

otáčky řemenice: $n = 60 \,.\, f' = 2\,445$ ot/min

17. Délku vodiče vypočítáme podle vztahu $l = \dfrac{R.S}{\rho}$. Jaký vztah dostaneme pro délku vodiče dosazením za odpor vodiče $R = \dfrac{U}{I}$?

Řešení:

$$l = \frac{\frac{U}{I}.S}{\rho} = \frac{U.S}{I.\rho}$$

18. Venkovní vedení z měděného vodiče délky $l = 1$ km má průřez $S = 4{,}15$ mm^2. Jaký má odpor při teplotě $t_1 = +40^0$ C a $t_2 = -30$°C.

K řešení příkladu použijte vztahy: $R = \dfrac{\rho . l}{S}$, $R = R_0 \,.[1 + \alpha\, (t - t_0)]$

$\rho = 0{,}0175$ Ω.mm^2.m^{-1} (měrný elektrický odpor mědi při 20 °C)

$\alpha = 0{,}004$ K^{-1} (teplotní odporový součinitel elektrického odporu mědi)

Řešení:

$R = 4{,}22$ Ω při 20 °C, $R = 4{,}56$ Ω při 40 °C, $R = 3{,}38$ Ω při – 30 °C

19. Dva rezistory o odporu 5,1 kΩ a 2,4 kΩ jsou zapojeny paralelně. Vypočítejte celkový odpor zapojených rezistorů. Pro celkový odpor dvou rezistorů zapojených paralelně platí $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Výsledek uveďte v Ω.

Řešení:

1 632 Ω

20. K síti o napětí 230 V jsou paralelně připojeny tyto spotřebiče: svítidlo o příkonu 40 W, televizor o příkonu 50 W a teplomet o příkonu 1 000 W. Vypočítejte:

a) elektrický proud I procházející jednotlivými spotřebiči, jestliže pro příkon P platí: $P = U \,.\, I$;

b) elektrický odpor R jednotlivých spotřebičů, jestliže platí $R = \frac{U}{I}$;

c) celkový proud, který odebírají spotřebiče ze sítě jako součet proudů procházejících jednotlivými spotřebiči.

Řešení:

a) I(svítidlo) = 174 mA, I(televizor) = 217 mA, I(přímotop) = 4,348 A

b) R(svítidlo) = 1 322 Ω, R(televizor) = 1 060 Ω, R(přímotop) = 53 Ω

c) $I = 4{,}739$ A

21. Pro výpočet proudu odebíraným obvodem musíme část obvodu s rezistory $R_1 = 40\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ nahradit třemi rezistory R_{12}, R_{23} a R_{13} zapojenými do hvězdy. Vypočítejte hodnoty těchto tří odporů, přičemž pro odpory R_{12}, R_{23} a R_{13} platí vztahy:

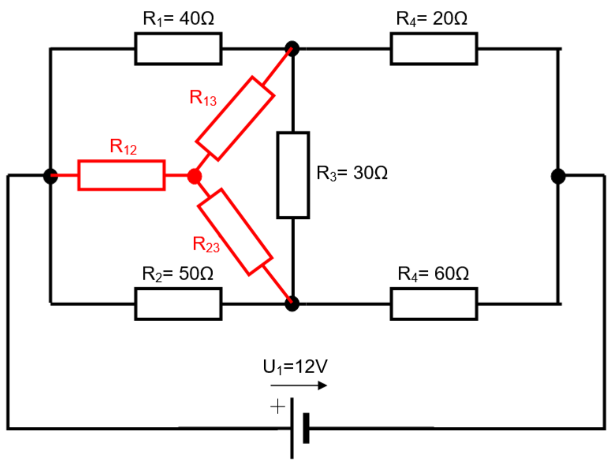
$$R_{12} = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{23} = \frac{R_2 . R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{13} = \frac{R_1 . R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Řešení:

$R_{12} = 16{,}67\ \Omega$

$R_{23} = 12{,}5\ \Omega$

$R_{13} = 10\ \Omega$



Obrázek 1. Algebra – příklad 21 – zadání

22. Určete velikost elektromotorického napětí U_i indukovaného v křídlech letadla letícího vodorovně rychlostí $v = 900$ km/h. Vzdálenost koncových bodů křídel je $l = 79$ m. Velikost svislé složky magnetické indukce magnetického pole Země je $B = 5 .\ 10^{-5}$ T. Pro výpočet indukovaného elektromotorického napětí platí $U_i = B \,.\, v \,.\, l$, kde B je složka magnetické indukce kolmá na směr pohybu vodiče o délce l, který se pohybuje rychlostí v kolmo k indukčním čarám.

Řešení:

$U_i = 0{,}9875$ V

4 Funkce

1. Pro střídavý proud v elektrickém obvodu platí rovnice $i = 5{,}0 \sin(200 \,.\, \pi . t)$. Určete okamžitou hodnotu proudu i v čase 1,25 milisekund od počátečního okamžiku.

   Řešení:

   $i = 3{,}5$ A

2. Na části obvodu, kterým prochází střídavý proud, je okamžité napětí dáno vztahem $u = U_m . \sin\left(\frac{2\pi}{T} . t + \frac{\pi}{6}\right)$. V čase $t = \frac{1}{12}T$ má okamžité napětí hodnotu $u = 10$ V. Určete amplitudu napětí U_m.

   Řešení:

   $U_m = 11{,}5$ V

3. Vodič délky $l = 2$ m, kterým protéká proud $I = 3$ A, vložíme do magnetického pole o velikosti magnetické indukce $B = 0{,}8$ T. Magnetické pole na vodič působí silou $F = 2{,}4$ N. Jaký úhel svírá vodič s indukčními čarami, platí-li vztah $F = B.\ I.\ l.\ \sin\alpha$.

   Řešení:

   $\alpha = 30^{\circ}$

4. Jaký úhel svírá vodič délky $l = 10$ cm, kterým protéká proud $I = 2$ A s indukčními čarami magnetického pole o velikosti magnetické indukce $B = 0{,}1$ T. Magnetické pole na vodič působí silou $F = 0{,}01$ N. V homogenním magnetickém poli je velikost magnetické síly určena vztahem $F = B.\ I.\ l.\ \sin\alpha$.

   Řešení:

   $\alpha_1 = 30^{\circ}$, $\alpha_2 = 150^{\circ}$

5. Pod jakým úhlem vletí elektron letící rychlostí $v = 2.10^{7}$ m.s^{-1} a náboji $Q = e = 1{,}602.10^{-19}$ C do homogenního magnetického pole o velikosti magnetické indukce $B = 6.10^{-4}$ T, které na něj působí silou 19.10^{-16} N, platí-li vztah $F = B.\ Q.\ v.\ \sin\alpha$.

   Řešení:

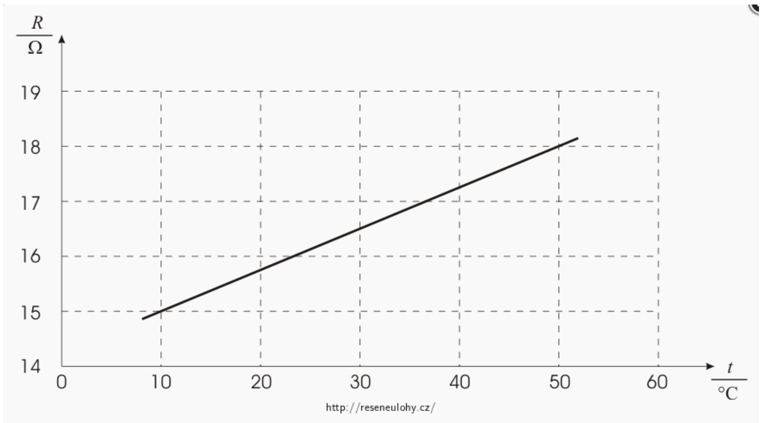
   $\alpha = 81{,}24487^{\circ} \approx 81^{\circ}15'$

6. Zaměstnankyně dílny má odstřihnout z bubnu s navinutým vodičem o délce 200 m kusy vodičů o délce 2,5 m. Vyjádřete funkci, která udává závislost délky zbývající části navinutého vodiče na bubnu na počtu odstřižených částí, a sestrojte její graf.

Řešení:

$y = 200 - 2{,}5 \,.\, x$; $\{x \in Z_0^+;\ x \leq 80\}$ $\Rightarrow$ Grafem je úsečka AB, A[0; 200], B[80; 0]

7. V grafu je zakreslená závislost odporu kovového vodiče na teplotě. Vypočítejte teplotní součinitel elektrického odporu α tohoto vodiče, platí-li $R = R_0.(1 + \alpha.t)$, a je-li $[\alpha] = K^{-1}$.



Graf 1. Funkce – příklad 7 – zadání

Řešení:

$\alpha = 5.10^{-3}\ K^{-1}$

8. Velikost elektrického proudu je při konstantním napětí nepřímo úměrná velikosti odporu vodiče. Najděte funkci, která určuje tuto závislost, jestliže víte, že při odporu 350 Ω protéká vodičem proud 30 mA.

Řešení:

$U = R \,.\, I = 10{,}5\ \text{V},\ I = \dfrac{U}{R} = \left(\dfrac{10{,}5}{R}\right)\ \text{A}$

9. Závislost odporu na teplotě je dána vztahem $R = R_0 \,.(1 + \alpha \,.\, t)$. Napište tuto funkci pro $R_0 = 100\ \Omega$ a $\alpha = 0{,}004\ K^{-1}$.

Řešení:

$R = 100 \,.(1 + 0{,}004\ t)$ $\Rightarrow$ $R = 0{,}4t + 100$

10. Jestliže v elektrickém obvodu s elektrickým odporem R a indukčností L vypojíme zdroj napětí, klesá proud z hodnoty I_0 na I podle exponenciální rovnice $I = I_0 . \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}.t}$. Napište tuto funkci pro $I_0 = 2$ A, $R = 10\ \Omega$, $L = 2$ H a sestrojte její graf.

Řešení:

$$I = 2.\mathrm{e}^{-\frac{10}{2}.t} \quad \Rightarrow \quad I = 2.\mathrm{e}^{-5.t}$$

11. Při paralelním spojení n článků platí $I = \dfrac{U}{R_e + \dfrac{R_i}{n}}$. Vyjádřete počet článků jako funkci proudu I.

Řešení:

$$I = \frac{U.n}{R_e.n + R_i} \quad \Rightarrow \quad U.n = I\,.\,R_e\,.\,n + I\,.\,R_i \quad \Rightarrow \quad n = \frac{I.R_i}{U - I.R_e}$$

12. Při stálém napětí je proud nepřímo úměrný odporu. Při odporu $R = 40\ \Omega$ procházel proudovým okruhem proud $I = 4{,}8$ A.
   a) Napište rovnici závislosti proudu I na odporu R při stálém napětí U.
   b) Jak silný proud při tom jistém napětí bude v obvodě, jestliže zvětšíme jeho odpor na 350 Ω?
   c) Co je konstanta úměrnosti v rovnici hledané funkce?

Řešení:

a) Funkci nepřímé úměrnosti podle Ohmova zákona vyjadřuje rovnice $I = \dfrac{U}{R}$.

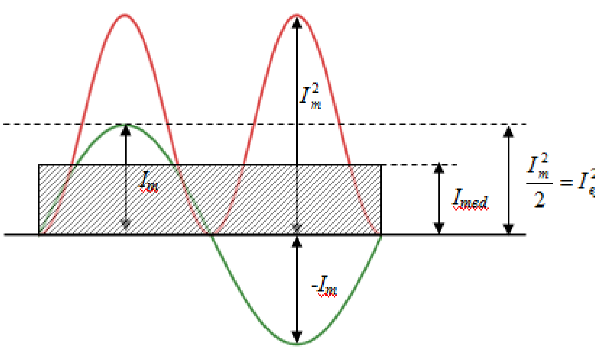
b) $U = R\,.\,I = 192\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I} = \dfrac{192\ \mathrm{V}}{\mathrm{R}} \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{192\ \mathrm{V}}{350\ \Omega} = 0{,}549\ \mathrm{A}$

c) Konstanta ve funkční rovnici je napětí U.

13. Ampérmetr ukazuje proud 200 mA. Určete maximální hodnotu I_m a střední hodnotu proudu I_{med} v obvodu, jestliže se jedná o střídavý proud sinusového průběhu a platí $I_{ef} = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$, $I_{med} = 0{,}637\,.\,I_m$

Řešení:

$I_m = 282{,}8$ mA, $I_{med} = 180{,}2$ mA



Obrázek 2. Funkce – příklad 13 – zadání

14. Z momentové charakteristiky asynchronního motoru s kotvou nakrátko určete hodnotu skluzu S či poměrnou část otáček motoru n ze synchronních otáček n_s.pro:

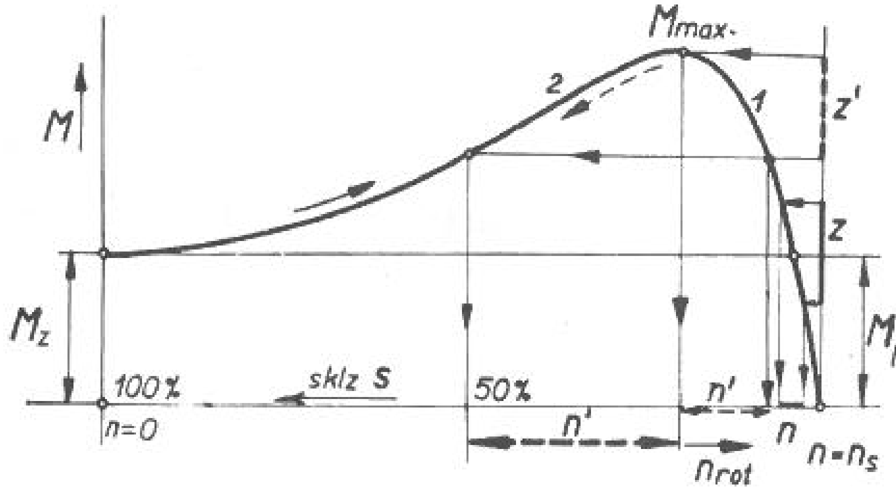
a) oblast, kdy motor běží naprázdno (bez zatížení);

b) místo největšího zatížení motoru;

c) rozpětí pracovních otáček;

d) oblast, kde má zatížení motoru nejmenší vliv na změnu otáček motoru;

e) oblast, kde má zatížení motoru největší vliv na změnu otáček motoru.



Graf 2. Funkce – příklad 14 – zadání

Řešení:

a) M = 0, jedná se o synchronní otáčky n_s, skluz 0 %

b) M_{max}, otáčky 0,8.n_s , skluz 20 %

c) M je od 0 po M_{max}, otáčky 0,8.n_s až n_s , skluz 0 % až 20 %

d) oblast M_N, otáčky od 0,96.n_s do n_s , skluz 0 % až 4 %

e) oblast kolem M_{max} při otáčkách 0,8.n_s a skluzu 20 % a M_z při zastavení motoru a 100 % skluzu

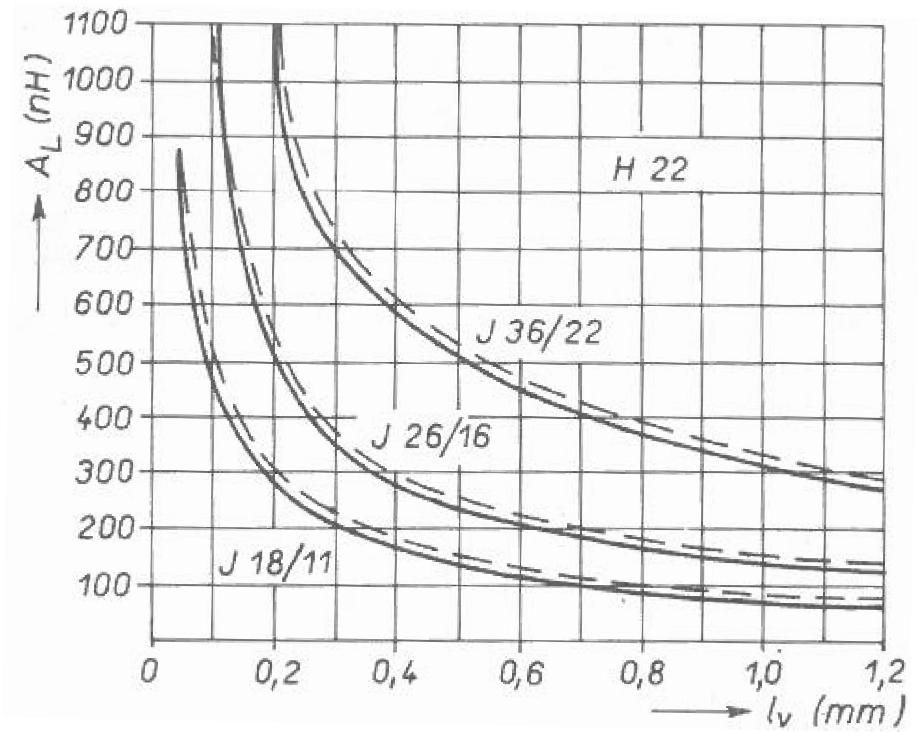
15. Z obrázku grafů závislosti činitele indukčnosti cívky A_L na šířce vzduchové mezery l_v pro hrníčková jádra cívek (plná čára) určete:

a) A_L pro J 18/11 pro l_v = 0,7 mm

b) A_L pro J 26/16 pro l_v = 0,2 mm

c) l_v pro J 36/22 pro A_L = 300 nH

d) A_L pro J 18/11 pro l_v = 0,15 mm



Graf 3. Funkce – příklad 15 – zadání

Řešení:

a) 100 nH

b) 500 nH

c) 1 mm

d) přibližně 350 nH

16. Mezi teploměrem a měřeným místem dochází k přestupu tepla do okamžiku, kdy se teploty teploměru a měřeného místa vyrovnají. Teplota teploměru se přitom mění exponenciálně podle vztahu $\vartheta = \vartheta_I.(1 - e^{-t/\tau})$, kde τ je doba, za kterou teploměr ukazuje 63,2 % teploty měřeného místa ϑ_I. Určete, jakou teplotu ukáže teploměr za dobu 3 τ.

Řešení:

$\vartheta = 95\ \%\ \vartheta_I$

17. Teplota teploměru se mění exponenciálně podle vztahu $\vartheta = \vartheta_I.(1 - e^{-t/\tau})$, kde τ je doba, za kterou teploměr ukazuje 63,2 % teploty měřeného místa ϑ_I. Počáteční teplota teploměru je 0 °C, teplota měřeného místa je $\vartheta_I = 100$ °C. Určete, jakou teplotu ukáže teploměr za dobu 3 τ; 4,6 τ; 6,2 τ.

Řešení:

95 °C, 98 °C, 99,8 °C

18. Okamžitá hodnota napětí v obvodu střídavého proudu se mění s časem podle vztahu $u = U_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T}.t + \frac{\pi}{3}\right)$, kde T je perioda. Určete okamžitou hodnotu napětí pro U_m = 120 V a $t = \frac{T}{4}$.

Řešení:

u = 60 V

19. Okamžitá hodnota napětí je dána vztahem $u = 60.\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Určete okamžitou hodnotu napětí pro $t = \frac{T}{6}$.

Řešení:

u = 51,96 V

20. Připojíme-li obvod s cívkou ke zdroji stejnosměrného napětí, proud i narůstá na maximální hodnotu I_0 postupně podle vztahu $i = I_0.(1 - e^{-t/T})$, kde T je tzv. časová konstanta obvodu; její hodnota je závislá na vlastnostech cívky. Určete proud i v obvodu pro $t = 3T$ a porovnejte jeho hodnotu s hodnotou I_0.

Řešení:

$i = 0{,}95\ I_0$

21. V obvodu střídavého proudu v čase t = 5 ms po zapojení tekl proud 4 mA, přičemž platí $i = I_0.\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$, kde T je tzv. časová konstanta a $I_0 = \frac{U}{R}$. Obvod má $R = 400\ \Omega$ a je připojen na napětí U = 1,85 V. Určete časovou konstantu T a pomocí PC nebo kalkulátoru sestrojte graf závislosti proudu i na čase.

Řešení:

I_0 = 4,625 mA, T = 2,50 . 10^{-3} s, $i = 4{,}625.\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}0025}}\right)$

22. Časový průběh střídavého proudu lze matematicky vyjádřit vztahem $i = I_m . \sin \omega t$, kde ω je tzv. úhlová frekvence, pro kterou platí $\omega = 2\pi f$, kde f je frekvence střídavého proudu, $f = 1/T$. T je doba kmitu, matematicky perioda funkce popisující průběh střídavého proudu. Sestavte rovnici sinusového střídavého proudu s kmitočtem f = 50 Hz, a maximální hodnotou proudu 2 A a určete hodnotu proudu v čase t = 2 ms.

Řešení:

$i = 2.\ \sin(2\pi.f.t) = 2.\ \sin(100\pi.t) \ \Rightarrow\ i = 1{,}18$ A

23. Ve kterém okamžiku je okamžité napětí rovno efektivnímu při frekvenci $f = 50$Hz? Musí platit: $U_{\max}.\sin\omega t = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, $\omega = 2\pi f$.

Řešení:

$$\sin(2\pi\cdot 50\cdot t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ 100\pi t_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\,;\ 100\pi t_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow\ t_1 = (0{,}0025 + k.0{,}02)\ \text{s},\ t_1 = (0{,}0075 + k.0{,}02)\ \text{s},\ k \in \mathrm{Z}$$

24. Vypočítejte fázový posuv proudu a napětí ve střídavém obvodu, jestliže cos $\varphi = -\,0{,}523$.

Řešení:

$\varphi = \pm 121{,}53^{\circ}$

25. Měsíční nájemné z elektroměru je 37,50 Kč. 1 kWh stojí 45 Kč. Určete závislost mezi měsíčním platem P za elektřinu a počtem s spotřebovaných kilowatthodin.

Řešení:

$P = (37{,}5 + 45.s)$ Kč

26. Napětí U v elektrickém obvodu klesá rovnoměrně s časem t. Na začátku pokusu bylo napětí $U_1 = 12$ V, na konci pokusu, který trval $t = 8$ s bylo napětí $U_2 = 6{,}4$ V. Vyjádřete závislost napětí U na času jako funkci t.

Řešení:

$U = (12 - 0{,}7\,t)$ V

27. Spotřebitel chce nakoupit větší množství součástek, maximálně však 80 ks. Má dvě možnosti nákupu:

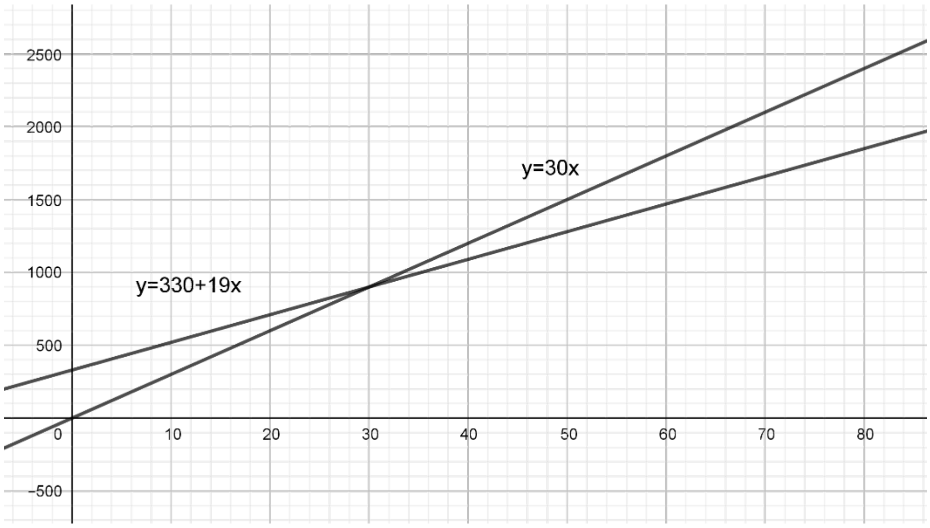
a) Zajede se svým autem k výrobci, u kterého stojí součástka tohoto zboží 19 Kč; musí však navíc zaplatit (jak si předem vypočítal) 330 Kč za benzín.

b) Součástky zakoupí v prodejně v bezprostřední blízkosti svého bydliště, kde však za 1 ks zaplatí 30 Kč.

Načrtněte graf závislosti ceny součástek na jejich zakoupeném počtu a určete, při jakém počtu součástek bude pro spotřebitele výhodnější zajet přímo k výrobci?

Řešení:

Zajet k výrobci je výhodnější pro víc než 30 součástek.



Graf 4. Funkce – příklad 27 – řešení

28. Jestliže vybíjíme nabitý kondenzátor s kapacitou $C = 1\ \mu F$ a s napětím $U = 500$ V přes rezistor o $R = 300\ M\Omega$, platí pro napětí na kondenzátoru vztah $U_c = U \,.\, e^{-t/\tau}$, kde t je čas a $\tau = RC$ je časová konstanta. Načrtněte graf závislosti napětí na kondenzátoru na čase a určete:

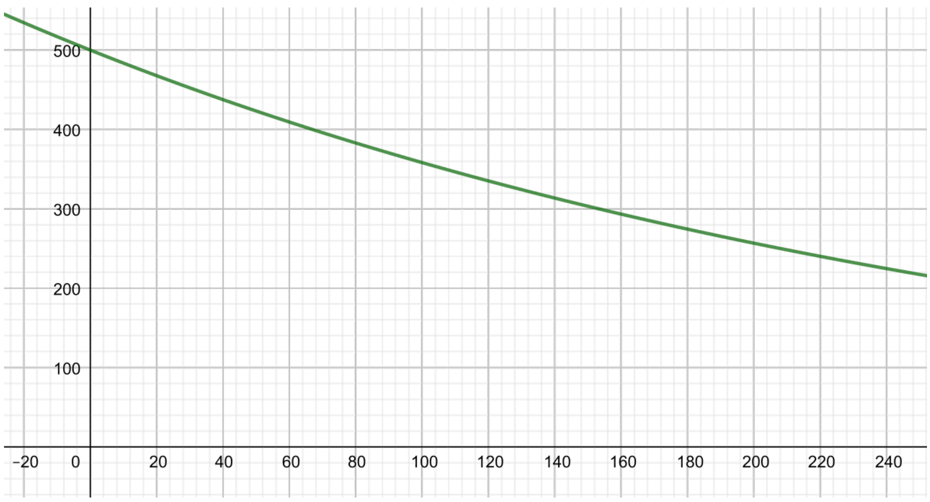
a) za jak dlouho klesne napětí na poloviční hodnotu;

b) jaké napětí bude na kondenzátoru za 10 s.

Řešení:

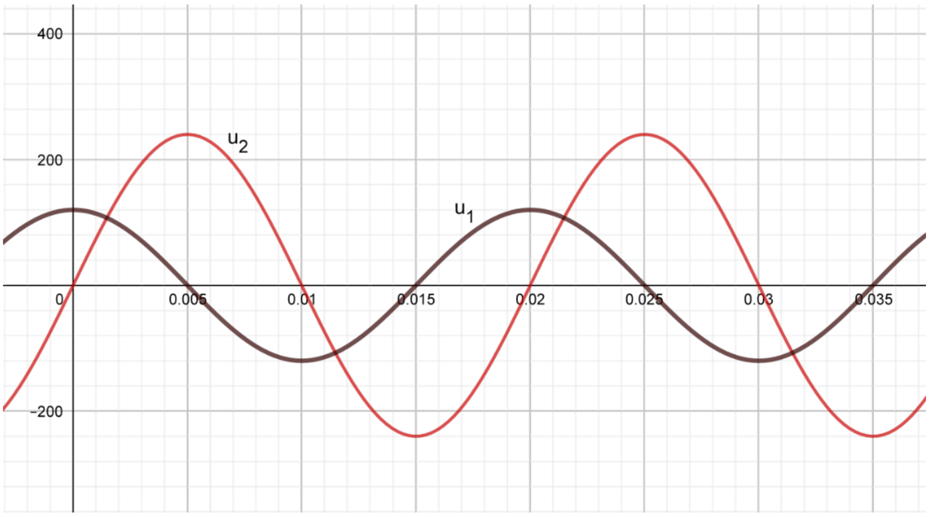
a) 207 s

b) 483,61 V



Graf 5. Funkce – příklad 28 – řešení

29. Určete poměr závitů nezatíženého transformátoru, jestliže závislost napětí u_1 a u_2 na čase t je zobrazena v grafu a platí $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$, kde U_1 a U_2 jsou maximální hodnoty napětí.

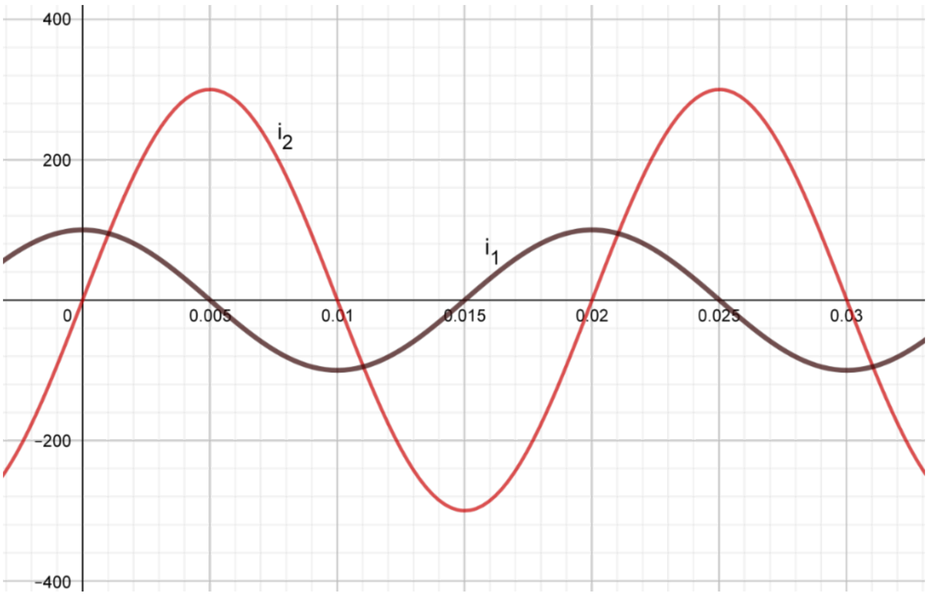


Graf 6. Funkce – příklad 29 – zadání

Řešení:

$$\frac{240\text{ V}}{120\text{ V}} = \frac{2}{1}$$

30. Určete poměr závitů nezatíženého transformátoru, jestliže závislost proudů i_1 a i_2 je zobrazena v grafu a platí $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$, kde I_2 a I_1 jsou maximální hodnoty elektrického proudu.



Graf 7. Funkce – příklad 30 – zadání

Řešení:

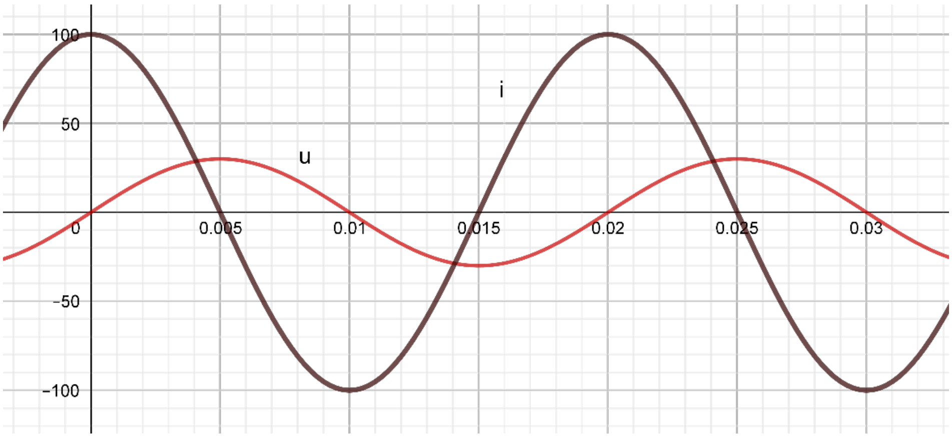
$$\frac{100\text{ A}}{300\text{ A}} = \frac{1}{3}$$

31. V grafu je znázorněn průběh závislosti okamžitého napětí u ve V a okamžitého proudu i v mA v závislosti na čase pro neznámý spotřebič. Určete:

a) maximální hodnoty proudu I_{max} a napětí U_{max} na spotřebiči

b) efektivní hodnotu proudu $I_{ef} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ a napětí $U_{ef} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$

c) impedanci spotřebiče $Z = U : I$ a fázový posun proudu vůči napětí



Graf 8. Funkce – příklad 31 – zadání

Řešení:

a) $U_{max} = 30$ V, $I_{max} = 100$ mA

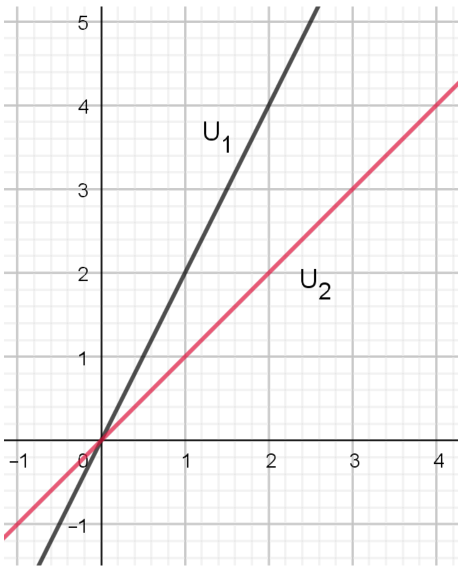
b) $U_{ef} = 21{,}21$ V, $I_{ef} = 70{,}71$ mA

c) $Z = 300\ \Omega,\ 2\pi.\frac{0{,}005}{0{,}02} = \frac{\pi}{2}$, tedy $\varphi = -90° = -\frac{\pi}{2}$, okamžité napětí předbíhá proud o 90°

32. V grafu je znázorněn průběh napětí na vstupu U_1 a průběh napětí na výstupu U_2 v závislosti na čase pro dělič napětí. Určete, v jakém poměru daný dělič napětí dělí.

Řešení:

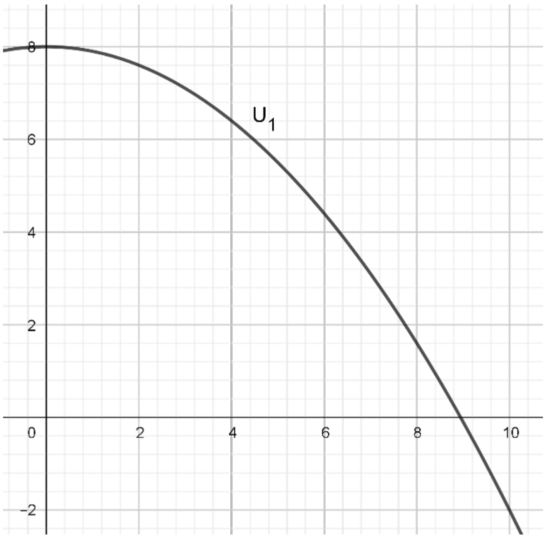
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{2}$$



Graf 9. Funkce – příklad 32 – zadání

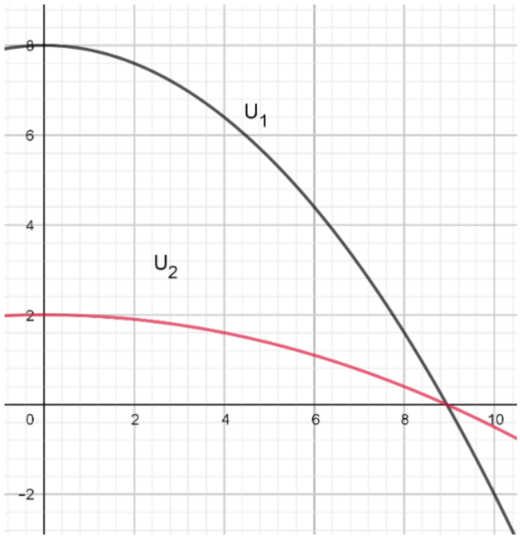
33. V grafu je znázorněn průběh napětí na vstupu U_1 ve voltech v závislosti na čase v sekundách pro dělič napětí. Načrtněte do grafu průběh napětí na výstupu U_2 , jestliže dělič napětí dělí napětí v poměru $U_2 : U_1 = 1 : 4$.

Zadání:



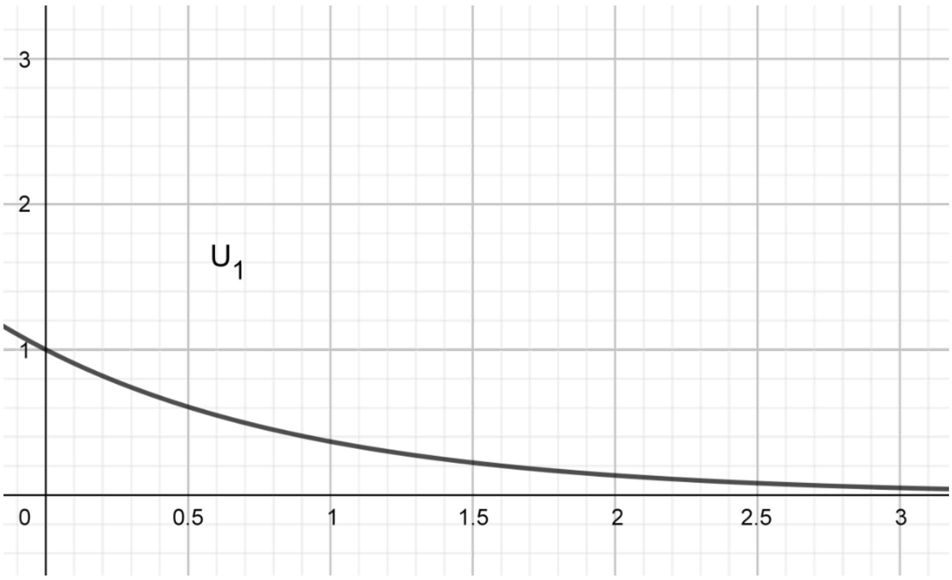
Graf 10. Funkce – příklad 33 – zadání

Řešení:



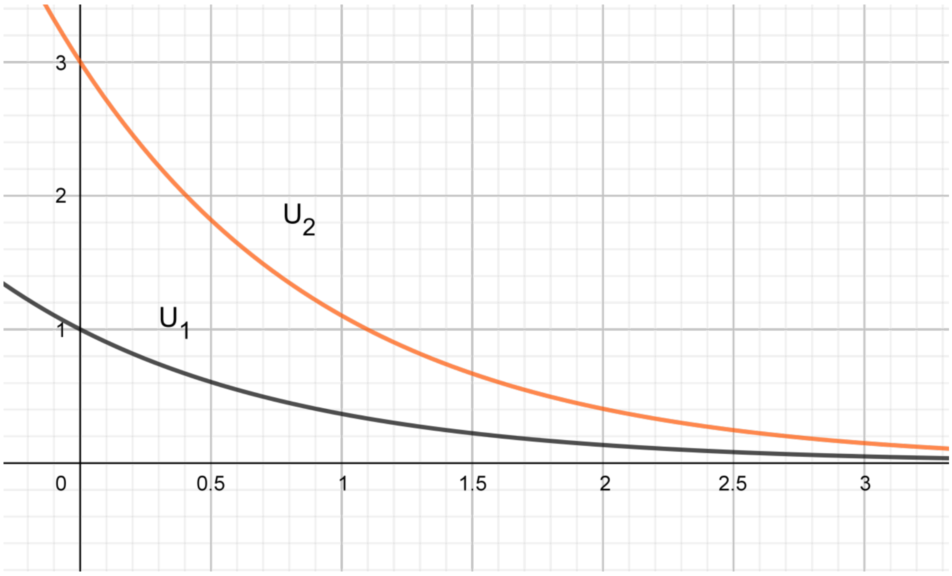
Graf 11. Funkce – příklad 33 – řešení

34. V grafu je znázorněn průběh napětí na vstupu U_1 ve voltech v závislosti na čase v sekundách pro násobič napětí. Načrtněte do grafu průběh napětí na výstupu U_2 , jestliže násobič napětí násobí v poměru $U_2 : U_1 = 3 : 1$



Graf 12. Funkce – příklad 34 – zadání

Řešení:



Graf 13. Funkce – příklad 34 – řešení

5 Rovnice a nerovnice

1. V dílně byly na výrobu elektrosoučástek dva stroje. Kdyby pracovaly oba stroje současně, vyrobily by objednané součástky za 2 hodiny a 24 minut. Méně výkonný stroj se pokazil a výkonnější stroj zpracoval zakázku za 4 hodiny. Za jak dlouho by zakázku zpracoval méně výkonný stroj, kdyby vyráběl součástky sám?

   Řešení:

   6 hodin

2. Pozemek na stavbu výrobní haly má jednu stranu o 70 m delší než druhou stranu. Rozloha pozemku je 1,2 ha. Jaké jsou rozměry pozemku?

   Řešení:

   $a = 80$ m, $b = 150$ m

3. Z určitého místa vyjíždí nákladní auto se součástkami pro podnik vyrábějící elektromotory. Řidič však zapomene ve firmě jednu krabici se součástkami, proto za půl hodiny za ním ve stejném směru vyjede osobní auto s touto krabicí. Nákladní auto jede stálou rychlostí 60 km.h^{-1}, osobní auto stálou rychlostí 80 km.h^{-1}. Za jakou dobu od vyjetí nákladního auta a v jaké vzdálenosti se obě vozidla potkají?

   Řešení:

   t = 2 h, s = 120 km

4. Výrobní závod má tři dílny a zaměstnává 258 zaměstnanců. V první dílně pracuje o 8 zaměstnanců méně než ve druhé dílně a ve třetí dílně pracuje o 14 zaměstnanců více než ve druhé dílně. Kolik zaměstnanců pracuje v jednotlivých dílnách.

   Řešení:

   76 zaměstnanců v první dílně, 84 ve druhé dílně a 98 ve třetí dílně

5. Benzinová čtyřtaktní elektrocentrála spotřebovala při prvním použití 20 % benzinu z nádrže. Při druhém použití se spotřebovalo 10 % benzinu z množství, které zůstalo po prvním použití. Po těchto dvou použitích zůstalo v nádrži ještě 9 litrů benzinu. Kolik litrů benzinu bylo původně v nádrži?

   Řešení:

   12,5 litru

6. V dílně splnili roční plán produktivity práce na 103,8 % a tím dosáhli zvýšení produktivity práce o 19,8 % ve srovnání s předchozím rokem. Vypočítejte, jaké zvýšení produktivity práce bylo naplánováno pro roční plán?

   Řešení:

   Produktivita práce na daný rok je $x\ .\ z$, kde z je produktivita v předešlém roce, skutečná produktivita práce je 1,038 plánované, tedy 1,038 . $x\ .\ z$.

   Proto platí $1{,}038x = 1{,}198 \;\Rightarrow\; x = 1{,}154 \;\Rightarrow$ Plánovaný vzrůst produktivity byl 15,4 %.

7. Vodič délky 100 cm se má ohnout do pravého úhlu tak, aby delší rameno bylo o 10 cm kratší než trojnásobek délky kratšího ramene. Určete délku ramen.

   Řešení:

kratší rameno:	x cm		$x =$ 27,5 cm
delší rameno:	$(3x - 10)$ cm	$\Rightarrow\; (3x - 10) = (100 - x)$	72,5 cm

8. Výrobní kapacita automatu A je p součástek za hodinu, výrobní kapacita automatu B je q součástek za hodinu.

   a) Jakou kapacitu x musí mít automat C, aby jeho kapacita nahradila kapacitu automatů A i B dohromady?

   b) Jaký minimální počet automatů C je třeba, chceme-li jimi nahradit 5 automatů A a 6 automatů B?

   c) Jaký musí být výkon automatu C, abychom mohli čtyřmi automaty C nahradit výkon 5 automatů A a 6 automatů B?

   Řešení:

   a) $x \geq p + q$

   b) 6 automatů C

   c) musí platit: $4x \geq 5p + 6q \;\Rightarrow\; x \geq \dfrac{5p + 6q}{4}$

9. Upravte vztah $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ pro výpočet napětí na ideálním kondenzátoru U_c.

   Řešení:

   $U_C = U_L - \sqrt{U^2 - U_R^2}$

10. Pro výpočet elektrického odporu R drátu platí $R = \rho \cdot \dfrac{l}{S}$, kde l je délka drátu, S průřez

drátu a ρ je materiálová konstanta. Vztah upravte na tvar umožňující přímé dosazení průměru drátu o kruhovém průřezu.

Řešení:

$$R = \rho.\frac{l}{\frac{\pi.d^2}{4}} = \frac{4.\rho.l}{\pi.d^2}$$

11. Pro průměr drátu platí $d = \sqrt{\frac{4.\rho.l}{\pi.R}}$, kde l je délka drátu, R jeho odpor a ρ je materiálová konstanta. Vypočtěte odpor drátu R.

Řešení:

$$R = \frac{4.\rho.l}{\pi.d^2}$$

12. Pro zdroj o vnitřním odporu R_i zatížený odporem R_e platí $I\,.\,R_e = E - I\,.\,R_i$. Určete proud I, je-li $R_i = 0{,}24\ \Omega$, $R_e = 10\ \Omega$, $E = 15{,}36$ V.

Řešení:

$$E = I\,.\,(R_e + R_i) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E}{R_e + R_i} = \frac{15{,}36\ \text{V}}{10\ \Omega + 0{,}24\ \Omega} = 1{,}5\ \text{A}$$

13. Ze vztahu $I_2 = I.\frac{R_1}{R_1 + R_2}$ vypočtěte odpor R_1, je-li proud $I_2 = 135$ mA, $I = 1\,223{,}5$ mA, $R_2 = 0{,}77\ \Omega$.

Řešení:

$$I_2.(R_1 + R_2) = I\,.\,R_1 \;\Rightarrow\; I_2\,.\,R_1 + I_2\,.\,R_2 = I\,.\,R_1 \;\Rightarrow\; R_1.(I_2 - I) = -\,I_2\,.\,R_2 \;\Rightarrow\; R_1 = \frac{I_2.R_2}{I - I_2}$$

$R_1 = 0{,}095\ \Omega$

14. Dva rezistory spojené za sebou mají celkový odpor 25 kΩ, spojené vedle sebe mají odpor 4 kΩ. Jaká je velikost jednotlivých odporů? Pro paralelně zapojené rezistory platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, pro sériově zapojené rezistory platí $R = R_1 + R_2$.

Řešení:

sériové zapojení (za sebou): $R_1 + R_2 = R \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_2 = 25\ \text{k}\Omega \quad \Rightarrow \quad x + y = 25$

paralelní zapojení (vedle sebe): $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{4\ \text{k}\Omega} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$

Řešením soustavy rovnic dostaneme kvadratickou rovnici:

$x^2 - 25x + 100 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 20, x_2 = 5 \;\Rightarrow\; R_1 = 20\ \text{k}\Omega, R_2 = 5\ \text{k}\Omega$ (nebo naopak)

15. Dva rezistory spojené paralelně mají výsledný odpor 1,75 Ω, spojené v sérii mají odpor 16 Ω. Jaká je velikost odporu jednotlivých rezistorů? Pro paralelně zapojené rezistory platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, pro sériově zapojené odpory platí $R = R_1 + R_2$

Řešení:

sériové zapojení: $R_1 + R_2 = R \;\Rightarrow\; R_1 + R_2 = 16\ \Omega \;\Rightarrow\; x + y = 16$

paralelní zapojení: $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \;\Rightarrow\; \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1{,}75\ \text{k}\Omega} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1{,}75}$

Řešením soustavy rovnic dostaneme kvadratickou rovnici:

$y^2 - 16y + 28 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 14, y_2 = 2 \;\Rightarrow\; R_1 = 14\ \Omega, R_2 = 2\ \Omega$ (nebo naopak)

16. Kolik žárovek 230 V, 0,2 A můžeme paralelně připojit ke zdroji o výkonu $P = 4{,}6$ kW, je-li jeho vnitřní odpor včetně přívodů 0,5 Ω? Pro výkon platí vztah $P = U\,.\,I$, na zdroji a přívodech je spád napětí $U = R\,.\,I$.

Řešení:

Je-li počet paralelních žárovek x, je celkový proud $(x\,.\,0{,}2)$ (u paralelního zapojení se proudy sčítají). $\Rightarrow\; 4\,600 = (230 + 0{,}5\,.\,0{,}2.x)\,.\,0{,}2.x \;\Rightarrow\; 4\,600 = 46x + 0{,}02x^2$

$x^2 + 2\,300x - 230\,000 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 95{,}99, x_2 = -\,2\,395{,}99.$

Řešení úlohy vyhovuje pouze x_1. Toto číslo je však nutné zaokrouhlit dolů, proto můžeme připojit 95 žárovek.

17. V elektrickém obvodu je v sérii zapojen rezistor o odporu $R = 2\ \Omega$ a spotřebič, na kterém bylo naměřeno napětí $U = 110$ V. Celkový příkon je $P = 600$ W a je dán vztahem $P = RI^2 + UI$. Jaký proud prochází obvodem?

Řešení:

$600\ \text{W} = 2\ \Omega\,.\,I^2 + 110\ \text{V}\,.\,I \;\Rightarrow\; I = 5\ \text{A}$

18. Jaký je elektrický odpor rezistoru v obvodu a jaký proud jím protéká, když se při zvětšení jeho elektrického odporu o 10 Ω zmenší proud o 1 A při nezměněném napětí $U = 120$ V? Z Ohmova zákona platí $U = R\,.\,I$.

Řešení:

$$U = R \,.\, I \;\Rightarrow\; R = \frac{120\,V}{I}$$

$$\Rightarrow\; 120\,V = \left(\frac{120\,V}{I} + 10\Omega\right).(I - 1\,A) \;\Rightarrow\; I^2 - I - 12 = 0 \;\Rightarrow\; I = 4\text{ A},\, R = 30\ \Omega$$

19. Paralelně spojené rezistory s elektrickými odpory $R_1 = R_2 = x\ \Omega$, $R_3 = (x - 10)\ \Omega$ mají výsledný elektrický odpor $R = 5\ \Omega$. Určete tyto odpory.

Pro paralelně spojené rezistory platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Řešení:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} \;\Rightarrow\; x^2 - 25x + 100 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 20,\, x_2 = 5 \text{ (nevyhovuje)}$$

$R_1 = R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = (20 - 10)\ \Omega = 10\ \Omega$

20. Tři rezistory zapojené paralelně mají odpor 1 000 Ω. První dva rezistory mají odpor 5 000 Ω a 2 500 Ω. Vypočítejte odpor třetího rezistoru.

Pro paralelně spojené rezistory platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Řešení:

2 500 Ω

21. Vypočtěte elektrický odpor reostatu složeného ze šesti stejných rezistorů zapojených za sebou (sériově), jestliže v poloze 1 (zapojen jen jeden rezistor reostatu) prochází reostatem i zátěží proud 5,8 A a v poloze 6 (zapojeno všech 6 rezistorů reostatu) prochází reostatem i zátěží proud 1,6 A při napětí 230 V.

Řešení:

Elektrický odpor pro zapojení v poloze 1:

$$R_1 = \frac{230\text{ V}}{5{,}8\text{ A}} = 39{,}7\ \Omega$$

Elektrický odpor pro zapojení v poloze 6:

$$R_6 = \frac{230\text{ V}}{1{,}6\text{ A}} = 143{,}8\ \Omega$$

$$\Rightarrow\; \begin{aligned} R_z + R &= 39{,}7\ \Omega \\ R_z + 6R &= 143{,}8\ \Omega \end{aligned} \;\Rightarrow\; 5R = 104{,}1\ \Omega \;\Rightarrow\; \begin{aligned} R &= 20{,}8\ \Omega \doteq 21\ \Omega \\ 6R &= 126\ \Omega \end{aligned}$$

22. Vypočítejte proudy protékající rezistory v elektrickém obvodu na obrázku. Při řešení využijeme Kirchhoffovy zákony.

Řešení:

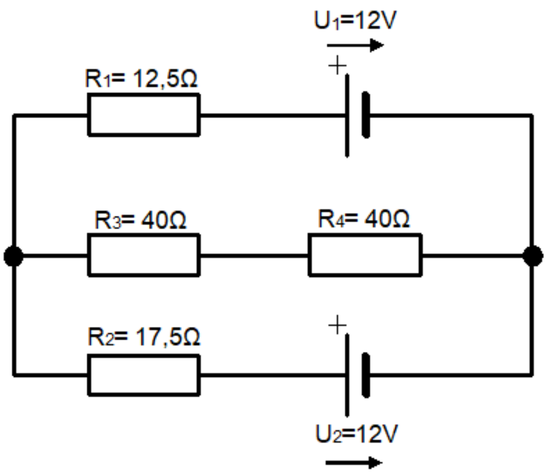
I. Zvolíme si směry proudů v jednotlivých smyčkách. Pokud bude realita jiná, projeví se záporným znaménkem u vypočítané hodnoty proudu.

II. Součet proudů v uzlu musí být 0 nebo-li, co do uzlu přiteče, musí odtéct.
Využijeme zvolené směry proudů v obrázku a musí platit: $I_1 + I_2 = I_3$

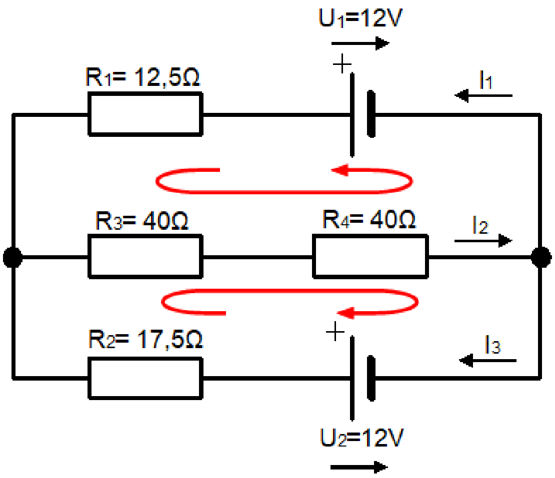
III. Součet napětí (s přihlédnutím ke směru) v obvodu musí být 0.
Pro horní smyčku (ve směru šipky): $12{,}5I_1 + 40I_3 + 40I_3 - 12 = 0$
Pro dolní smyčku (ve směru šipky): $17{,}5I_3 + 40I_3 + 40I_3 - 12 = 0$

IV. Řešíme soustavu tří rovnic:

$I_1 + I_2 = I_3$	$I_1 = 80{,}19$ mA
$12{,}5I_1 + 40I_3 + 40I_3 - 12 = 0$	$I_2 = 57{,}28$ mA
$17{,}5I_3 + 40I_3 + 40I_3 - 12 = 0$	$I_3 = 137{,}47$ mA



Obrázek 3. Rovnice a nerovnice – příklad 22 – zadání



Obrázek 4. Rovnice a nerovnice – příklad 22 – řešení

23. Pro průběh elektrického proudu v obvodu po vypnutí zdroje proudu platí $i = I_0 . \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$. Určete, za jakou dobu klesne proud i na 1 % původní hodnoty I_0, je-li časová konstanta obvodu $\tau = \frac{1}{12}$ s.

Řešení:

$$\frac{I_0}{100} = I_0 . \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \log \frac{1}{100} = -\frac{t}{\frac{1}{12}} \log \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad -2 = -12t \,.\, \log \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{6 . \log \mathrm{e}} = 0{,}38 \text{ s}$$

24. Pro kapacitu dvoudrátového vedení platí $\dfrac{C}{l} = \dfrac{\varepsilon}{4\ln\dfrac{a}{r}}$, kde $\dfrac{C}{l}$ je kapacita na jednotku délky, ε permitivita, a vzdálenost drátů, r poloměr drátů. Vyjádřete poloměr r.

Řešení:

$$\ln\frac{a}{r} = \frac{\varepsilon.l}{4C} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{r} = \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon.l}{4C}} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{a} = \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon.l}{4C}} \quad \Rightarrow \quad r = a.\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon.l}{4C}}$$

25. Pro impedanci Z sériového obvodu s indukčností L, kapacitou C a odporem R zapojeného ke zdroji střídavého proudu platí $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$. Při jakém kmitočtu f ($\omega = 2\pi f$) bude impedance Z nejmenší?

Řešení:

Protože člen R^2 není velikostí ω ovlivněn, bude celý výraz nejmenší, když se členy závislé na ω budou rovnat nule.

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 LC = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad 2\pi f = \pm\sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Význam má jen kladný kořen. Pro tuto frekvenci má obvod nejmenší impedanci, nastává rezonance.

26. Obytnou místnost ve zděné budově vytápíme elektrickým topným tělesem o příkonu 3 kW. Při venkovní teplotě –10 °C se teplota v místnosti ustálí na 20 °C. Jak se změní teplota v místnosti, zvýšíme-li příkon topného tělesa na 4 kW. Pro tepelné ztráty místnosti Z platí zjednodušený vztah $Z = C\,.\,(t - t_0)$, kde C je koeficient vyjadřující tepelné vlastnosti místnosti, t je teplota v místnosti, t_0 je venkovní teplota (za oknem).

Řešení:

V ustáleném stavu jsou tepelné ztráty Z rovné teplu dodávanému topidlem při dodávaném příkonu. Ze zadaných hodnot původního stavu určíme nejprve hodnotu C a po dosazení nového příkonu za Z do zadaného vztahu určíme $t = 30$ °C.

27. Každý z obou zaměstnanců měl zhotovit 450 stejných součástek. Jeden z nich zhotoví za hodinu o 5 součástek více než druhý. Kolik hodin pracoval každý, jestliže za celou práci bylo třeba celkem 23 pracovních hodin.

Řešení:

18 a 15 hodin

28. Dva pracovníci provedou práci za $6\frac{2}{3}$ hodiny. Za jakou dobu vykoná tutéž práci první pracovník, který k jejímu provedení potřebuje o 3 hodiny kratší dobu než druhý?

Řešení:

12 hodin

29. Ze dvou skupin vykoná jedna určitou práci za dobu o 10 hodin kratší než druhá. Kdyby pracovaly společně, vykonaly by práci za 12 hodin. Za jak dlouho vykoná práci každá skupina sama?

Řešení:

30 a 20 hodin

30. Dva vodiče spojené vedle sebe mají odpor $R = 1{,}5\ \Omega$. Jeden z vodičů má odpor o 4 Ω větší než druhý vodič. Určete odpory obou vodičů. Při spojení vodičů vedle sebe vypočteme celkový odpor R podle vzorce $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, kde R_1 a R_2 jsou odpory prvního a druhého vodiče.

Řešení:

2 Ω a 6 Ω

31. Dva rezistory zapojené sériově mají odpor 250 Ω a zapojené paralelně 40 Ω. Vypočítejte odpory obou rezistorů. Pro sériové zapojení rezistorů platí $R = R_1 + R_2$, pro paralelní zapojení platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Řešení:

200 Ω a 50 Ω

32. Pro změnu otáček n turbín nebo odstředivých čerpadel je dána závislost spádu nebo dopravní výšky h vztahem $\frac{n_1}{n} = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$.
    a) Jaké otáčky n_1 by měla mít turbína elektrárny, která při spádu $h = 3{,}5$ m měla $n = 180$ otáček/min a zátopou se spád zmenšil na $h_1 = 1{,}8$ m?
    b) Kolikrát by se měly zvětšit otáčky odstředivého čerpadla, aby místo do $h = 12$ m dodávalo do výše $h_1 = 20$ m?

Řešení:

a) 129 otáček za minutu

b) 1,29krát

33. Na dvou stožárech vzdálených 50 m jsou k sobě obrácené reproduktory. Na jednom stožáru dva a na druhém 3 reproduktory. V jaké vzdálenosti na spojnici mezi stožáry musíme stát, abychom slyšeli z obou stran zvuk stejně zřetelně?

Řešení:

Musí platit $\frac{x^2}{(50-x)^2} = \frac{2}{3}$, odtud x = 22,5 m, tj. 22,5 m od stožáru se 2 reproduktory.

34. Jaký proud I prochází odporovým drátem R = 8 Ω, jestliže za čas t = 60 s se uvolní teplo Q = 5 000 J. Platí $Q = I^2 . R . t$

Řešení:

I = 3,23 A

35. Dva kondenzátory zapojené paralelně mají kapacitu 16 nF a zapojené sériově 1,75 nF. Vypočítejte kapacity obou kondenzátorů? Pro paralelní zapojení kondenzátorů platí $C = C_1 + C_2$ a pro sériové $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Řešení:

2nF a 14nF

36. Dva rezistory zapojené za sebou (sériově) mají odpor 1 000 Ω a vedle sebe (paralelně) odpor menší než 90 Ω. Určete odpor obou rezistorů.

Řešení:

100 Ω $< R_1 <$ 900 Ω, R_2 = 1 000 – R_1

37. Kdyby dělník zkompletoval za směnu o 20 komponentů víc než plánoval, zkompletoval by za 9 směn víc než 840 komponentů. Kdyby za směnu zkompletoval o 10 komponentů méně než plánoval, zkompletoval by za 12 směn maximálně 840 komponent. Kolik komponent musí zkompletovat za směnu?

Řešení:

$73\frac{1}{3} < x \leq 80$

38. Zmenšíme-li u měděného drátu dlouhého $l = 1$ m průřez S o 1 mm², zvětší se jeho odpor R o 0,00085 Ω. Určete průměr drátu, je-li $\rho = 0{,}017\ \dfrac{\Omega\,.\,\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ (jednotka využívaná v technice). K řešení využijte vztah $R = \dfrac{\rho . l}{S}$.

Řešení:

$$R_1 = \frac{\rho . l}{S} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \left(\frac{0{,}017}{S}\right)\Omega$$

$$R_2 = R_1 + 0{,}00085\ \Omega = \left(\frac{0{,}017}{S-1}\right)\Omega \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}017}{S} + 0{,}00085 = \frac{0{,}017}{S-1} \quad \Rightarrow \quad S^2 - S - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad S = 5\ \mathrm{mm}^2$$

$$S = \frac{\pi . d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 2{,}52\ \mathrm{mm}$$

6 Planimetrie

1. Jaký je obsah a jaký obvod čtvercových desek vzduchového kondenzátoru, mezi nimiž je vzdálenost $l = 2$ cm? Náboj kondenzátoru je $Q = 8{,}854.10^{-3}$ μC, napětí je $U = 2\,000$ V, permitivita vakua $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1}, relativní permitivita vzduchu $\varepsilon_r = 1$. Pro výpočet použijte vztah: $U = \dfrac{Q.l}{\varepsilon_0.\varepsilon_r.S}$.

   Řešení:

   $a = 10$ cm, $S = 100$ cm^2, $o = 40$ cm

2. Kabel používaný pro rozvody běžných zásuvek v domácnostech se obvykle skládá ze tří vodičů. Každý z nich má obsah kruhového průřezu 2,5 mm^2. Jaký je průměr jednotlivých vodičů?

   Řešení:

   $d = 1{,}78$ mm

3. Jaký průměr má ocelový vodič kruhového průřezu o odporu $R = 26\ \Omega$ a délce $l = 100$ m? Měrný elektrický odpor oceli, ze které je vyroben vodič, je $\rho = 0{,}13.10^{-6}\ \Omega$.m. Závislost odporu R na geometrických rozměrech vodiče a na látce, ze které je vodič, vyjadřuje vztah $R = \rho.\dfrac{l}{S}$.

   Řešení:

   $d = 0{,}8$ mm

4. Velikost magnetické indukce B ve středu kruhového závitu o poloměru r je dána vztahem $B = \mu.\dfrac{I}{2.r}$, kde I je proud procházející závitem a μ je permeabilita prostředí.
   Pro vakuum má v soustavě SI hodnotu $4.\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}. Jaký je obsah závitu umístěného ve vakuu, kterým protéká proud $I = 10$ A a v jehož středu je velikost magnetické indukce $B = 10^{-4}$T?

   Řešení:

   $r = 0{,}063$ m, $S = 0{,}012$ m^2

5. Jaká je řezná rychlost kotouče brusky, jestliže frekvence otáčení elektromotoru je $f = 50$ Hz a průměr kotouče je $d = 125$ mm? Použijte vztah $v = \pi\ .\ d\ .\ f$.

Řešení:

$v = 19{,}63$ m/s

6. Vypočítejte rychlost odvíjení vodiče z válcové tyče o průměru 20 mm, jestliže je počet otáček tyče 160 za minutu.

Řešení:

$v = 0{,}168$ m/s

7. Jak velký by byl průměr drátu vedení, který má při proudovém zatížení 20 A plochu průřezu 10 mm^2?

Řešení:

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 3{,}57\ \text{mm}$$

8. Přípojnice v rozvodně má obdélníkový průřez 20 mm × 80 mm a prochází jí proud 1 000 A. Jaká je proudová hustota vodiče? Proudová hustota $J = \frac{I}{S}$.

Řešení:

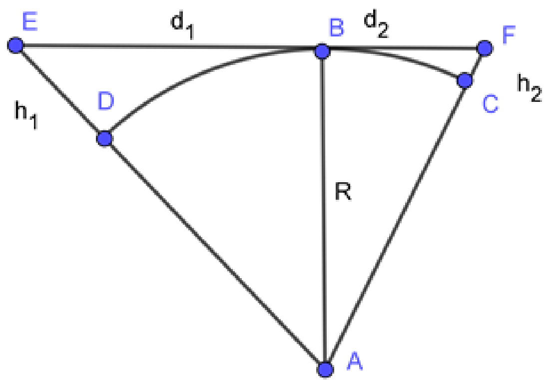
625 000 A/m^2

9. Vyhřívací tělísko elektrické pece je z nikelinového drátu s průměrem $d = 0{,}4$ mm dlouhého $l = 28$ m. Měrný odpor nikelinu je $\rho = 0{,}4\ \Omega.\text{mm}^2.\text{m}^{-1}$. Jaký je odpor vyhřívacího tělíska R, jestliže platí $R = \rho.\frac{l}{S}$?

Řešení:

$$R = \rho.\frac{l}{S},\ S = \pi.\frac{d^2}{4},\ R = 89\ \Omega$$

10. V jaké vzdálenosti od vysílače je zaručen dobrý příjem pozemního vysílání televize, jestliže výška antény vysílače je $h_1 = 320$ m a výška antény přijímače je $h_2 = 20$ m? Předpokládáme plochou krajinu, tedy že mezi přijímačem a vysílačem nejsou žádné významné terénní útvary. Podmínkou dobrého příjmu je přímá viditelnost mezi anténou vysílače a anténou přijímače. Při řešení uvažujte i vliv zakřivení Země. Viz obrázek.



E – vrchol antény vysílače

F – vrchol antény přijímače

DC – oblouk zakřivení Země

R – poloměr Země

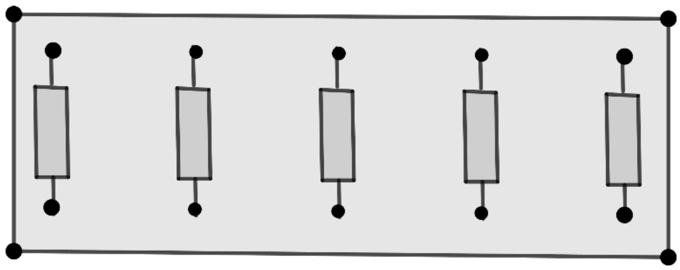
$d_1 + d_2$ – vzdálenost vysílače a přijímače

Obrázek 5. Planimetrie – příklad 10 – zadání

Řešení:

Protože oba trojúhelníky na obrázku mají u vrcholu B pravý úhel, platí: $d_1 = \sqrt{(R+h_1)^2 - R^2}$ a $d_2 = \sqrt{(R+h_2)^2 - R^2}$. Protože výšky h_1 a h_2 jsou malé ve srovnání s poloměrem Země R, můžeme po úpravě psát $d_1 \doteq \sqrt{2h_1R}$ a $d_2 \doteq \sqrt{2h_2R}$. Tedy výsledné vzdálenosti jsou 63 890 m a 15 972 m, což činí dohromady asi 80 km.

11. Vypočítejte celkovou délku vodičů, které mají co nejefektivněji sériově propojit pět rezistorů na obrázku. Deska má rozměry 30 cm a 10 cm. Body se nacházejí 2 cm od okrajů desky.

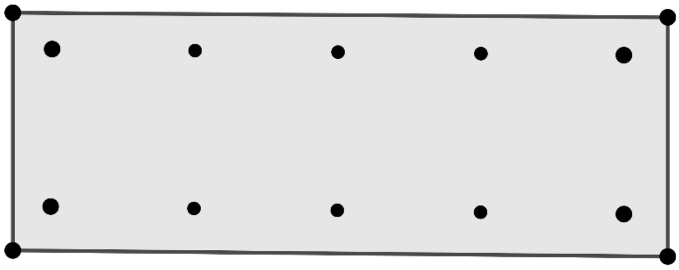


Obrázek 6. Planimetrie – příklad 11 – zadání

Řešení:

Vzdálenost mezi sousedními rezistory je 6,5 cm, tedy celková délka je 26 cm.

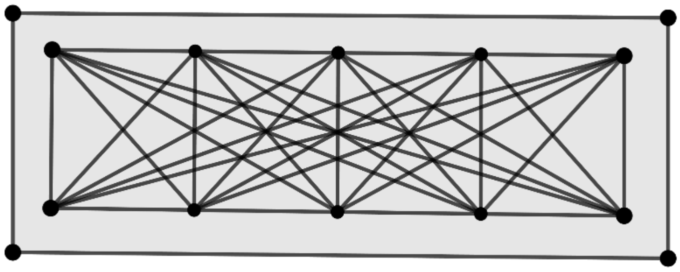
12. Vypočítejte celkovou délku izolovaných vodičů, které mají propojit všechny body na desce každý s každým. Každý spoj musí mít samostatný vodič. Deska má rozměry 50 cm a 20 cm. Body se nacházejí 2 cm od okrajů desky.



Obrázek 7. Planimetrie – příklad 12 – zadání

Řešení:

Všechna propojení vypadají asi takto (vodiče ve vodorovném směru mezi různými body nejsou rozlišitelné).



Obrázek 8. Planimetrie – příklad 12 – řešení

Vzdálenost mezi sousedními body ve svislém směru je 16 cm.

$\Rightarrow$ 5 . 16 cm = 80 cm

Vzdálenost mezi sousedními body ve vodorovném směru je 11,5 cm.

$\Rightarrow$ 2 . (4 . 11,5 cm + 3 . 23 cm + 2 . 34,5 cm + 1 . 46 cm) = 460 cm

V šikmých směrech se jedná o přepony pravoúhlých trojúhelníků.

$\Rightarrow \quad 8.\sqrt{11{,}5^2+16^2}+6.\sqrt{23^2+16^2}+4.\sqrt{34{,}5^2+16^2}+2.\sqrt{46^2+16^2}=575{,}27$

$\Rightarrow$ 80 cm + 460 cm + 575,27 cm = 1 115,27 cm

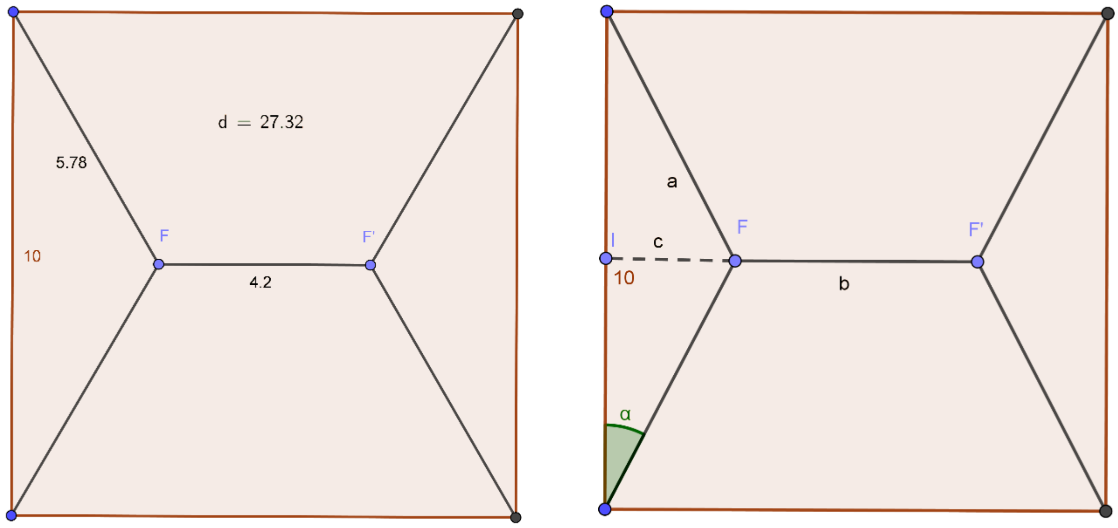
13. Na spojnici dvou světelných zdrojů A, B o svítivostech a, b určete bod, který je oběma zdroji stejně osvětlený. Intenzita osvětlení je přímo úměrná svítivosti a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Vzdálenost zdrojů je d. Kolik je takových bodů a jak jsou rozloženy, je-li a = 100cd a b = 25cd?

Řešení:

Vzdálenost od A je x, od B je $(d-x)$ nebo $(x-d)$ podle toho, je-li hledaný bod mezi body A, B. nebo vně úsečky AB. Intenzita osvětlení je přímo úměrná svítivosti a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od zdroje $x=\dfrac{d}{a-b}.(a\pm\sqrt{ab})$. Pro a = 100cd, b = 25cd je $x = 2d$ a $x=\dfrac{2}{3}d$.

14. Vypočítejte délku elektrického vedení, které má propojit 4 odběratele nacházející se ve vrcholech čtverce o straně 10 km. Najděte nejkratší řešení.

Řešení:



Obrázek 9. Planimetrie – příklad 14 – zadání

Můžeme odběratele propojit po stranách čtverce vedením délky 30 km. Pokud použijeme úhlopříčky čtverce, bude vedení měřit 28,3 km. Nejkratším řešením je vedení uvedené na obrázku, kde délka úsečky FF´ je $10\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=4{,}23$ km a celková délka vedení je 27,32 km. Výpočet je nad rámec středoškolské matematiky, ale výslednou hodnotu můžeme najít použitím softwaru dynamické geometrie.

Výpočet: $c = 5\ .\ \mathrm{tg}\ \alpha$, $a=\dfrac{5}{\cos\alpha}$, délka propojení $x = 10-10.tg\alpha+\dfrac{20}{\cos\alpha}$

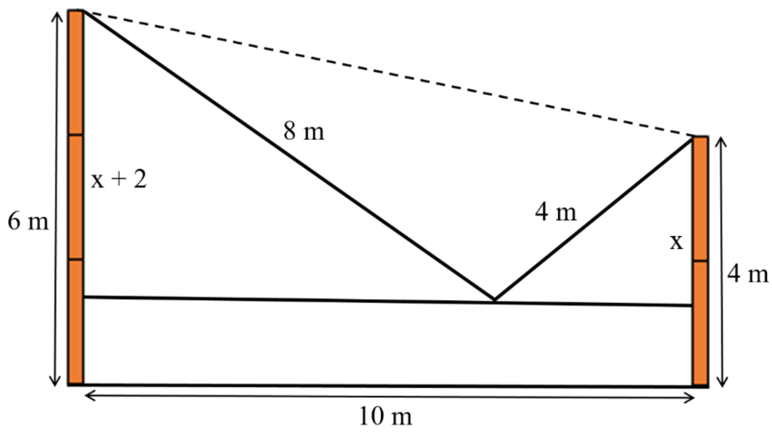
Pro extrém: $\dfrac{dx}{d\alpha}=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{-10}{\cos^2\alpha}+\dfrac{20.\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0 \quad\Rightarrow\quad 20\ .\ \sin\alpha = 10 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 30^{\circ}$

$x = 10.(1+\sqrt{3}) \approx 27{,}32$ km

15. Mezi vrcholy dvou sloupů o výškách 4 m a 6 m vzdálených od sebe 10 m je natažen drát délky 12 m. Ve třetině délky drátu od místa upevnění na nižším sloupu se nachází závaží. Určete výšku závaží nad zemí.

Řešení:

Drát vytvoří přepony 2 pravoúhlých trojúhelníků. Vzdálenost závaží ve vertikálním směru od vrcholu nižšího sloupu označíme x. Pro vzdálenost sloupů, kterou tvoří delší odvěsny obou trojúhelníků, platí $10 = \sqrt{4^2 - x^2} + \sqrt{8^2 - (2 + x)^2}$ Odtud $x = 2{,}314$ m. Výška nad zemí je 1,686 m.



Obrázek 10. Planimetrie – příklad 15 – řešení

7 Stereometrie

1. Jakou hmotnost má 100 m měděného vodiče o kruhovém průřezu, jehož obsah je 2,5 mm^2? Hustota mědi je 8,8 $g.cm^{-3}$.

   Řešení:

   2 200 g

2. Stavebník musí vykopat výkop k položení elektrické přípojky. Délka výkopu je 36 m, hloubka 80 cm a šířka 50 cm. Kolik m^3 zeminy musel při kopání výkopu stavebník vyházet?

   Řešení:

   14,4 m^3

3. Stínítko lampy má tvar polokoule. Vnější průměr koule, ze které bylo stínítko vyrobeno je 25 cm, tloušťka skla stínítka je 0,5 cm. Jaký je objem skla, které bylo spotřebováno na výrobu tohoto stínítka?

   Řešení:

   471,5 cm^3

4. Povrch krabičky na elektrosoučástku je 376 cm^2. Její strany jsou v poměru 3 : 4 : 5. Jaký je objem této krabičky?

   Řešení:

   $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 10$ cm, $V = 480$ cm^3

5. Kontejner pro převoz nově vyrobených televizorů je ve tvaru krychle, která má tělesovou úhlopříčku 216 cm. Jaký je objem a povrch této bedny?

   Řešení:

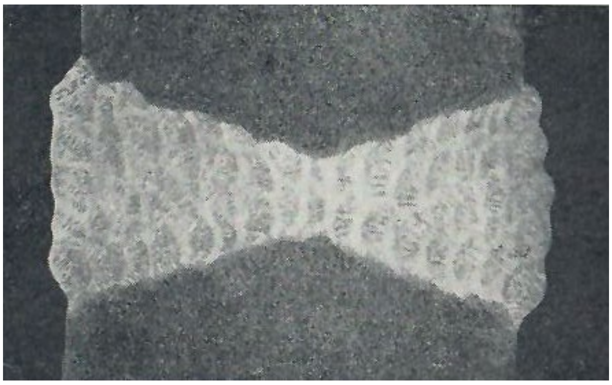
   $V = 1{,}94$ m^3, $S = 9{,}33$ m^2

6. Vypočítejte délku spirály z odporového drátu topného tělesa o délce 10 cm, průměru 1 cm, jestliže jsou závity drátu od sebe vzdáleny 5 mm.

Řešení:

Na 10 cm vychází 20 závitů po 5 mm od sebe. Tedy odporový drát musí tvořit úhlopříčku pláště válce, tedy obdélníka o rozměrech 10 cm a (20.*π*.*1*) cm. Délka odporového drátu bude přibližně 63,6 cm.

7. Vypočítejte množství spotřebovaného materiálu na provedení svaru elektrickým obloukem dvou plechů tloušťky 75mm a délky 2m na fotografii.



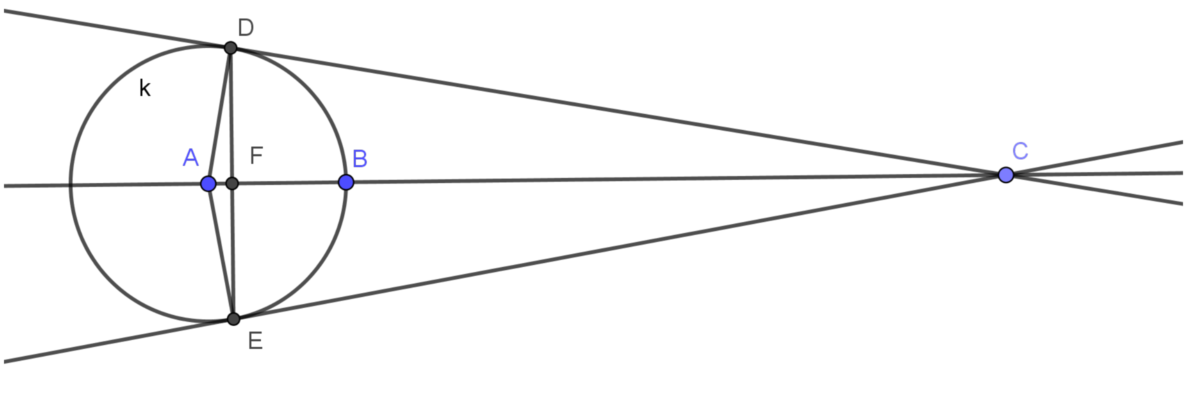
Obrázek 11. Stereometrie – příklad 7 – zadání

Řešení:

Změříme šířku plechů na obrázku. Přeměříme i ostatní rozměry a v daném měřítku přepočítáme. Můžeme počítat dva lichoběžníky. Jeden o základnách 40 mm a 13 mm a výšce 40 mm a druhý o základnách 40 mm a 13 mm a výšce 45 mm. Objem materiálu ve svaru je $\left(\frac{(40+13).40}{2}+\frac{(40+13).45}{2}\right).2\,000 = 4\,505\,000\ \text{mm}^3 = 4{,}5\ \text{dm}^3$.

8. Poloměr koule je 2m. Ve vzdálenosti 25 m od jejího středu je umístěn bodový světelný zdroj. Jak velkou část kulové plochy osvětlí?

Řešení:



Obrázek 12. Stereometrie – příklad 8 – zadání

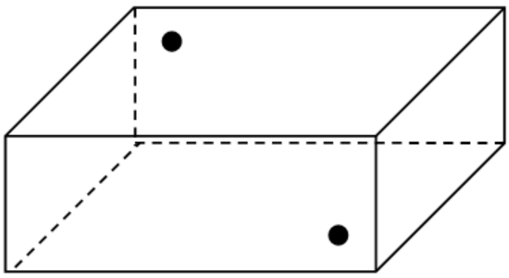
Z obou podobných pravoúhlých trojúhelníků ACD a DFC plyne |AD|:|AC| = |FD|:|CD|.

Pythagorovou větou vypočítáme |CD| = 24,9199 m $\Rightarrow$ |FD| = 1,9936 m.

Pythagorovou větou vypočítáme |FC| = 24,8400 m $\Rightarrow$ |FB| = 1,84 m.

Pak pomocí vzorce $S = 2\pi rv$ vypočítáme plochu pláště vrchlíku. Osvětlená plocha je 23,122 m^2 což je 46 % povrchu koule.

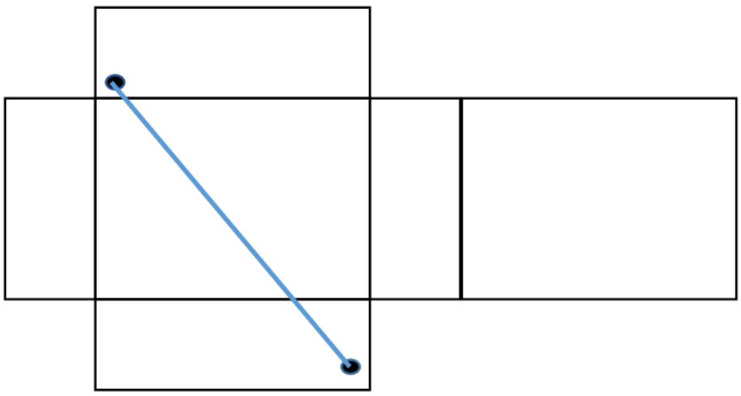
9. V místnosti tvaru kvádru o podstavě 5 m a 6 m a výšce 3,5 m se nacházejí na delších protějších stěnách v protilehlých rozích vždy 0,4 m od stěn, podlahy a stropu dvě přípojná místa elektrického rozvodu. Najděte nejkratší spojnici těchto bodů, která vede po stěnách místnosti, a vypočítejte její délku.



Obrázek 13. Stereometrie – příklad 9 – zadání

Řešení:

Pythagorovou větou vypočítáme $x^2 = 8{,}5^2 + 5{,}2^2 \Rightarrow x = 9{,}96$ m.



Obrázek 14. Stereometrie – příklad 9 – řešení

10. Stožár vysílače je 30 m vysoký a v polovině své délky je upevněn k zemi pěti provazy, z nichž každý má délku 20 m.
    a) Jaká je odchylka těchto provazů od vodorovné roviny?
    b) Jak daleko od sebe jsou konce provazů, mají-li od sebe stejné vzdálenosti?

Řešení:

a) 48,6°

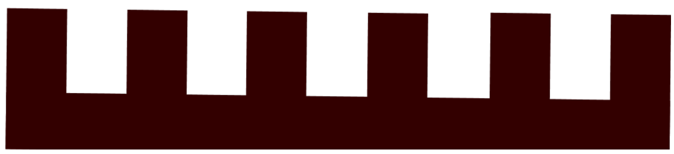
b) 18,7 m

11. Množství záření, které emituje rozžhavený plyn, závisí na objemu plynu. Intenzita vyzařování zdroje závisí na ploše povrchu svítidla. Určete poloměr koule, jejíž povrch v cm^2 bude mít menší hodnotu než její objem v cm^3.

Řešení:

$r < 3$ cm

12. Množství tepla, které uvolňuje chladič výkonového tranzistoru, závisí na ploše povrchu chladiče. Vypočítejte plochu povrchu chladiče ve tvaru obdélníkové čtvercové desky se šesti lamelami na obrázku, jestliže deska má 5 cm na 5 cm, tloušťka jedné lamely i celé desky je všude 4 mm a hloubka mezi lamelami je 6 mm.



Obrázek 15. Stereometrie – příklad 12 – zadání

Řešení:

65 cm^2

8 Analytická geometrie v rovině

1. Osový řez reflektoru je parabola. Napište její rovnici (při vhodných osách x a y), je-li hloubka reflektoru $h = 20$ cm a jeho šířka $d = 20$ cm, a určete souřadnice ohniska, ve kterém bude vlákno žárovky.

Řešení:

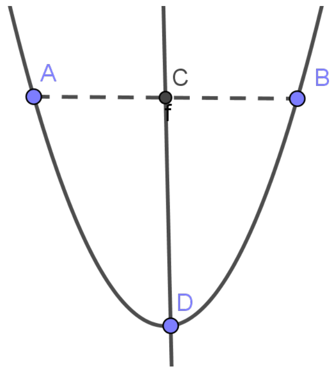
rovnice paraboly: $y^2 = 2 \,.\, p \,.\, x$

Do rovnice paraboly dosadíme bod X [20; 10] a vypočítáme parametr $\Rightarrow$ $p = 2{,}5$

$0{,}5p = 1{,}25 \Rightarrow$ F [1,25; 0]

2.

Podélný řez parabolickým zrcadlem reflektoru je parabola. Má-li reflektor odrážet světlo žárovky rovnoběžně, musí být žárovka umístěna v ohnisku paraboly. Určete vzdálenost f ohniska od vrcholu zrcadla, je-li vzdálenost $|AB| = 60$ cm a $|DC| = 40$ cm.



Obrázek 16. Analytická geometrie v rovině – příklad 2 – zadání

Řešení:

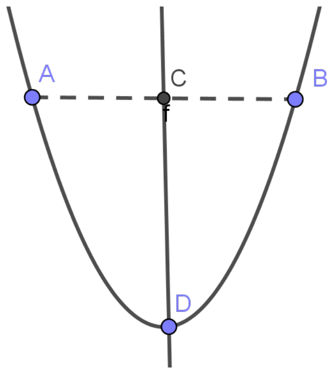
rovnice paraboly: $x^2 = 2 \,.\, p \,.\, y$

Do rovnice paraboly dosadíme bod B [30; 40] a vypočítáme parametr $\Rightarrow$ $p = 11{,}25$

$0{,}5p = 5{,}625$ cm

3.

Určete vzdálenost svítícího bodu (vlákna žárovky) od vrcholu paraboloidu reflektoru. $|AB| = 240$ mm a $|CD| = 240$ mm, je-li svítící bod umístěn v ohnisku.



Obrázek 17. Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – zadání

Řešení:

rovnice paraboly: $x^2 = 2 \, . \, p \, . \, y$

Do rovnice paraboly dosadíme bod B [120; 240] a vypočítáme parametr $\Rightarrow$ $p = 30$

$0{,}5p = 15$ mm

4. Magnetický indukční tok Φ plochou o obsahu S je určen vztahem $\Phi = B \, . \, S \, . \cos \alpha$, kde B je velikost vektoru magnetické indukce a α je úhel mezi vektorem magnetické indukce a normálou plochy o obsahu S. V magnetickém poli o velikosti magnetické indukce $B = 0{,}8$ T, je vložen čtvercový rovinný závit, který s vektorem magnetické indukce svírá úhel 60°. Jaká je délka strany závitu, je-li magnetický indukční tok 4.10^{-3} Wb.

Řešení:

$a = 0{,}1$ m

5. K popisu dějů v obvodu střídavého proudu nebo v např. elektromotoru se v elektrotechnice používají fázory, což jsou orientované úsečky (umístění vektorů), jejichž umístění má počáteční bod v počátku souřadnicové soustavy a koncový bod má souřadnice odpovídající hodnotám zobrazované veličiny. Úhel φ vektoru (fázoru) s osou x se nazývá v elektrotechnice fáze. Určete velikost proudu I a jeho fázi φ, je-li $I_x = 2{,}0$ A, $I_y = 4{,}0$ A.

Řešení:

$I = 4{,}47$ A, $\varphi = 63° \, 26'$

6. Trojúhelník ABC má na obrazovce monitoru souřadnice A [20; 15], B [30; 25], C [25; 50]. Určete souřadnice trojúhelníka, jestliže jej posuneme ve směru **u** (70; 100).

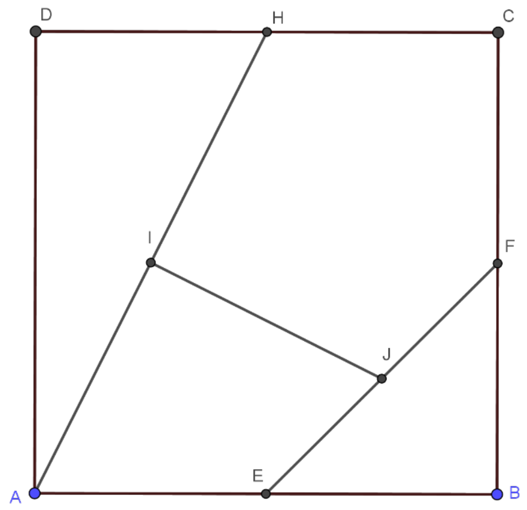
Řešení:

Každý bod posuneme přičtením vektoru **u** (70; 100), tedy A [90; 115], B [100; 125], C [95; 150].

7. Vypočítejte délku vedení mezi body I a J, které se nachází ve středu úseček AH a EF v rozvodné síti na obrázku. Body E, F, H jsou středy stran čtverce o délce strany 10 km.

Řešení:

Zavedeme soustavu souřadnic A [0; 0], B [0; 10], C [10; 10], D [10; 0]. Snadno vypočítáme I [2,5; 5], J [7,5; 2,5]. Tedy |IJ| = 5,59 km.



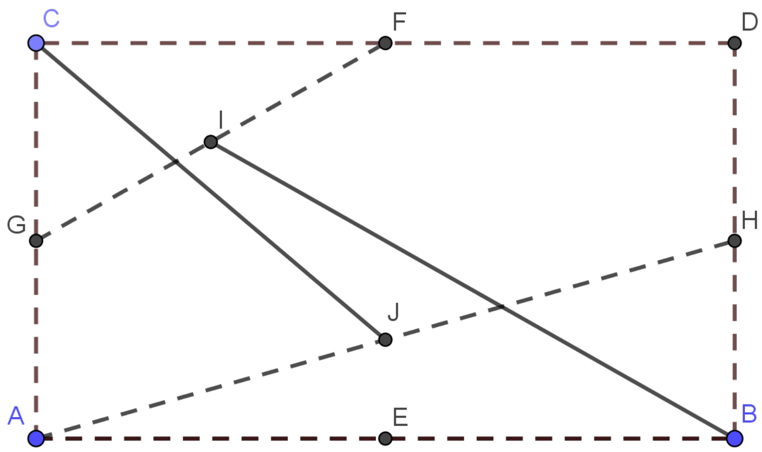
Obrázek 18. Analytická geometrie v rovině – příklad 7 – zadání

8. Bod A má na obrazovce monitoru souřadnice A[50; 50]. Urči souřadnice bodu B [b_1; b_2], tak aby |AB| = 80 a platilo (b_1 – 50) : (b_2 – 50) = 2. Výsledek zaokrouhlete na celá čísla.

Řešení:

$$\sqrt{4(b_2-50)^2+(b_2-50)^2}=80,\ b_2=50\pm\frac{80}{\sqrt{5}}\doteq 50\pm 36,\ b_1=50\pm\frac{160}{\sqrt{5}}\doteq 50\pm 72$$

9. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají vodivé cesty JC a BI, a délku vodivé cesty mezi body I a J, které se nacházejí ve středu úseků GF a AH na plošném spoji (viz obrázek) na obdélníkové desce ABDC o stranách 10 cm a 16 cm. Body G, F, H jsou středy stran obdélníka.



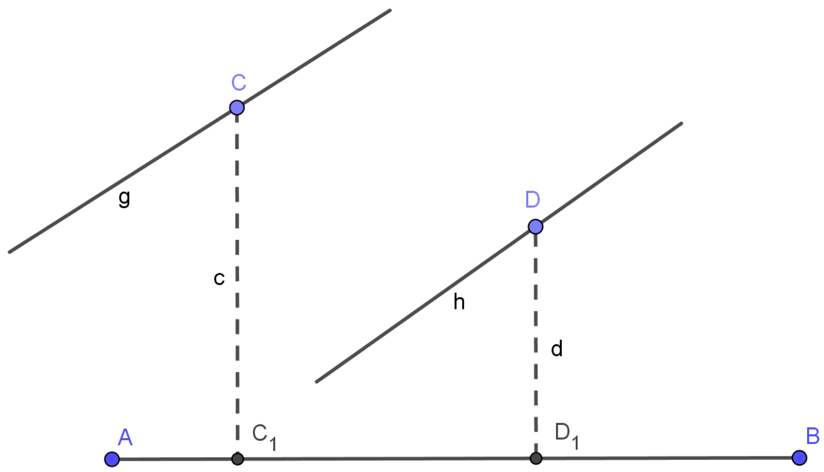
Obrázek 19. Analytická geometrie v rovině – příklad 9 – zadání

Řešení:

Zavedeme souřadnou soustavu A [0; 0], B [16; 0], C [0; 10], D [16; 10]. Snadno vypočítáme I [4; 7,5], J [8; 2,5]. Tedy |IJ| = 6,40 cm. Vektory odpovídající orientovaným úsečkám mají souřadnice **JC** (– 8; 7,5) a **BI** (– 12; 7,5).

Pro velikost úhlu mezi nimi je cos α = 152,25 : 155,18, tedy α = 11,15°.

10. Elektrické vedení je třeba podepřít nevodivou konstrukcí ze dvou přímých vzpěr, které vycházejí z bodů A a B a procházejí body C a D., kde mají podpírat dvě kolmá vedení g a h. Určete výšku nad spojnicí AB a vzdálenost ve vodorovném směru od bodu A průsečíku obou vzpěr, jestliže $|CC_1| = 5$ m, $|DD_1| = 3$ m, $|AC_1| = 2$ m, $|C_1D_1| = 4$ m a $|C_1B| = 8$ m, kde C_1 a D_1 jsou kolmé průměty bodů C a D na spojnici AB.



Obrázek 20. Analytická geometrie v rovině – příklad 10 – zadání

Řešení:

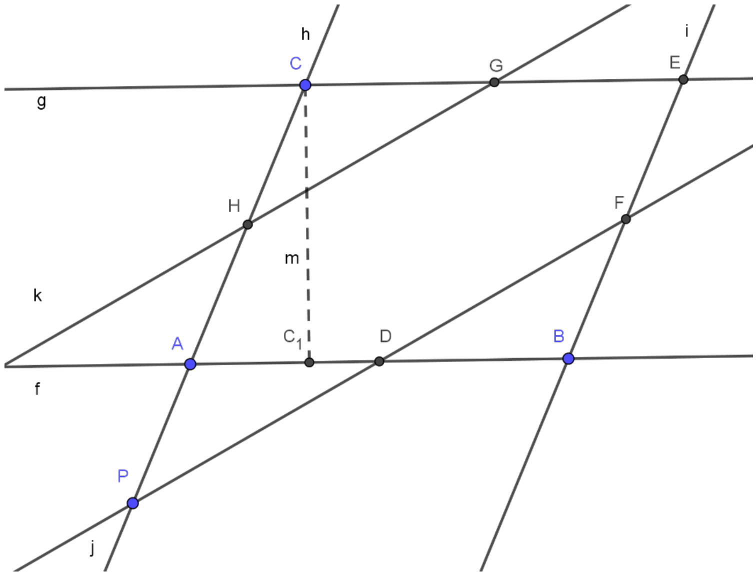
Zavedeme-li kartézskou souřadnou soustavu s počátkem v bodě A, dostaneme souřadnice bodů na obrázku A [0; 0], B [10; 0], C [2; 5], D [6; 3]. Hledaný bod P bude průsečík přímek AC a BD nebo přímek AD a BC.

$P_1\left[\frac{30}{13};\frac{75}{13}\right]$ nebo $P_2\left[\frac{50}{9};\frac{25}{9}\right]$

11. Na obrázku je část elektrické rozvodné sítě. Sloupy tvoří rovnoběžník ABEC o rozměrech |AB| = 20 km, $|AC_1| = 5$ km, a $|CC_1| = 15$ km. Body D, F, G, H jsou středy stran rovnoběžníku ABEC. Určete:

a) vzdálenost sloupu P, na kterém se protínají přímá vedení *h* a *j*, od sloupu B;

b) vzájemnou vzdálenost vedení *k* a *j*.



Obrázek 21. Analytická geometrie v rovině – příklad 11 – zadání

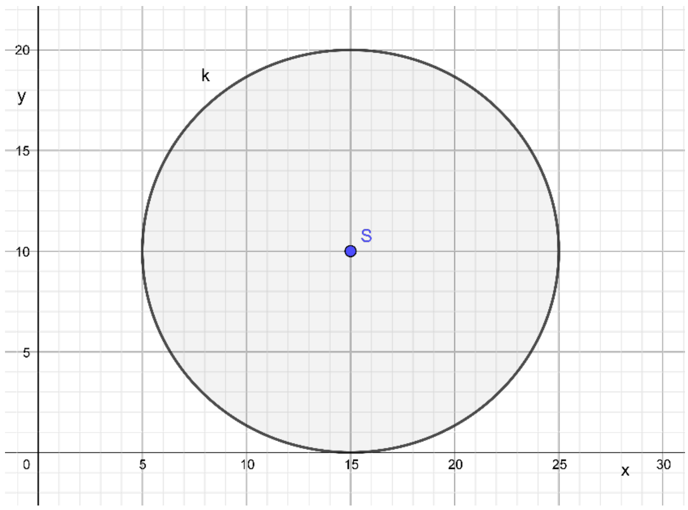
Řešení:

Zavedeme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem v bodě A a dostaneme souřadnice bodů na obrázku A [0; 0], B [20; 0], C [5; 15], E [25; 15].

a) Hledaný bod P bude průsečík přímek AC a DF. P [– 2,5; – 7,5], |PB| = 23,717 km.

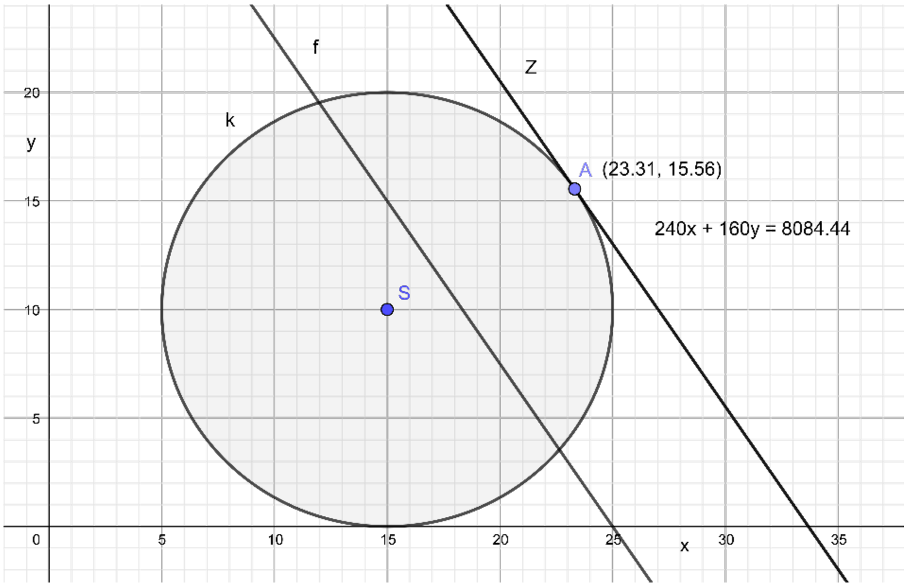
b) Vzdálenost vedení *j* a *k* je vzdálenost rovnoběžek DF a HG, což můžeme vypočítat jako vzdálenost bodu H od přímky DF. v (H; DF) = 10,29 km.

12. Při výrobě elektronických přístrojů A o počtu kusů x a elektronických přístrojů B o počtu kusů y je zisk dán vztahem $z = 240x + 160y$. Určete hodnoty x a y, tak aby byl zisk co největší. Z podmínek pro výrobu (kapacity výroby, pokrytí vstupů apod.) plyne, že x a y musejí určovat body ležící v kruhu na obrázku. K řešení využijte vhodný grafický software.



Graf 14. Analytická geometrie v rovině – příklad 12 – zadání

Řešení:



Graf 15. Analytická geometrie v rovině – příklad 12 – řešení

Hledáme společné body přímek $240x + 160y = z$, což jsou pro různé hodnoty zisku z rovnoběžky, s kruhem na obrázku. Mezní hodnoty mají tečny ke kružnici. Nejvyšší hodnotu z má tečna z pro parametr $z = 8084{,}44$ při A [23,31; 15,56]. Řešení musejí být celá čísla. Vypočítáme pro hodnoty $x = 23$ a $y = 15$ zisk $z = 7\,920$ a pro hodnoty $x = 24$ a $y = 14$ zisk $z = 8\,000$. Nejvyššího zisku dosahujeme při výrobě 24 kusů přístrojů A a 14 kusů přístrojů B se ziskem 8 000 Kč.

13. Firma vyrábí dva druhy elektrotechnických součástek. Využívá k tomu čtyři zdroje surovin A, B, C, D, jejichž kapacity jsou postupně 12, 8, 16 a 12 jednotek. K výrobě jednoho kusu prvního druhu součástky jsou třeba tato množství surovin: 2 jednotky zdroje A, 1 jednotka zdroje B a 4 jednotky zdroje C. K výrobě jednoho kusu druhého druhu součástky je třeba těchto množství surovin: 2 jednotky zdroje A, 2 jednotky zdroje B a 4 jednotky zdroje D. Z jednoho kusu prvního druhu součástky má firma zisk 20,- Kč, z jednoho kusu druhého druhu součástky má firma zisk 30,- Kč. Kolik kusů prvního a druhého druhu součástky musí firma vyrobit, aby byl zisk z její výroby maximální?

Řešení:

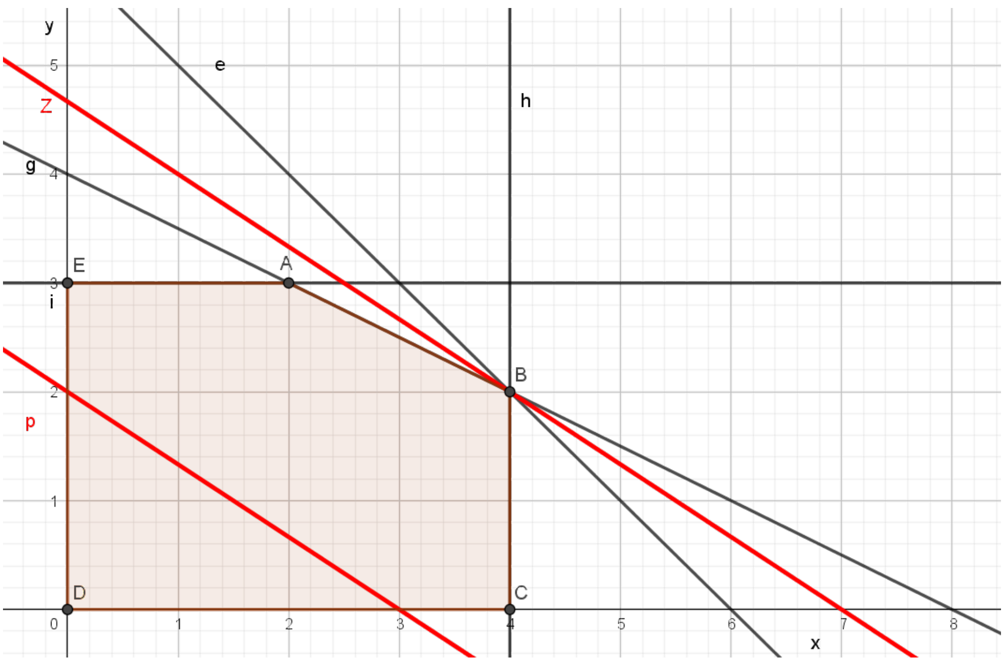
Písmenem x označme počet kusů prvního druhu součástky, který má podnik vyrobit, a písmenem y počet kusů druhého druhu součástky. Hodnoty x a y jsou nezáporné. Na výrobu jednoho kusu prvního druhu součástky jsou třeba z jednotlivých zdrojů tato množství surovin: 2, 1, 4, 0. Výroba jednoho kusu druhého druhu součástky vyžaduje množství: 2, 2, 0, 4.

Omezení ve spotřebě surovin jsou tedy tato:

A: $2x + 2y \leq 12$	C: $4x \leq 16$	$x \geq 0$
B: $x + 2y \leq 8$	D: $4y \leq 12$	$y \geq 0$

Zisk (účelová funkce) $z = 20x + 30y$. Tuto funkci máme maximalizovat. Nakreslíme mnohoúhelník vytvořený omezujícími podmínkami.

Podle obrázku je to pětiúhelník ABCDE. Zvolme $z = 60$ a zobrazme přímku p: $20x + 30y = 60$. Maximálnímu zisku odpovídá přímka, která je s přímkou p rovnoběžná, má s pětiúhelníkem společný aspoň jeden bod a její vzdálenost od počátku souřadnic je přitom maximální. Je to zřejmě přímka procházející bodem B [4; 2], tedy o rovnici $20x + 30y = 140$. Tedy největší zisk 140 Kč bude při výrobě 4 kusů součástky prvního druhu a 2 kusů součástky druhého druhu. Podnik by měl vyrábět dvakrát tolik součástek prvního druhu než součástek druhého druhu.



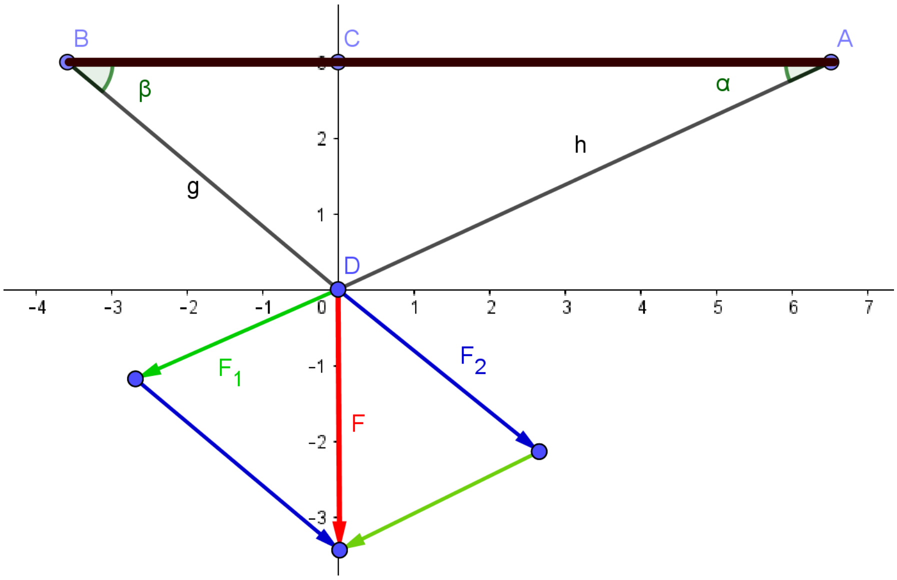
Graf 16. Analytická geometrie v rovině – příklad 13 – řešení I

14. Oběžná dráha umělé družice Magion měla perigeum $\pi = 406$ km, apogeum $\alpha = 764$ km. Určete osy její eliptické dráhy, jestliže se v ohnisku dráhy nachází Země.

Řešení:

$\pi = a - e$; $\alpha = a + e$; $2a = \alpha + \pi$; $a = 585$ km, $e = 179$ km, $b^2 = a^2 - e^2$, $b = 557$ km

15. Osvětlovací lampa, jejíž hmotnost je m, visí na dvou nestejně dlouhých lankách, upevněných ve dvou místech stropu. Se spojnicí těchto míst lanka svírají úhly α a β. Určete velikost sil, jimiž jsou lanka napínána. Velikost výsledné tíhové síly F vypočítáme $F = m \, . \, g$, kde g je tíhové zrychlení.



Obrázek 22. Analytická geometrie v rovině – příklad 15 – zadání

Řešení:

Zavedeme-li jako počátek kartézské soustavy souřadnic společné působiště sil, pak z vodorovných souřadnic vektorů F_1 a F_2 plyne $F_1 \, . \cos \alpha = F_2 \, . \cos \beta$ a pro svislé souřadnice vektorů F_1 a F_2 svislých souřadnic platí $F_1 \, . \sin \alpha + F_2 \, . \sin \beta = m \, . \, g$

Vyřešením soustavy rovnic dostaneme:

$$F_1 = \frac{mg \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} \qquad F_2 = \frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}$$

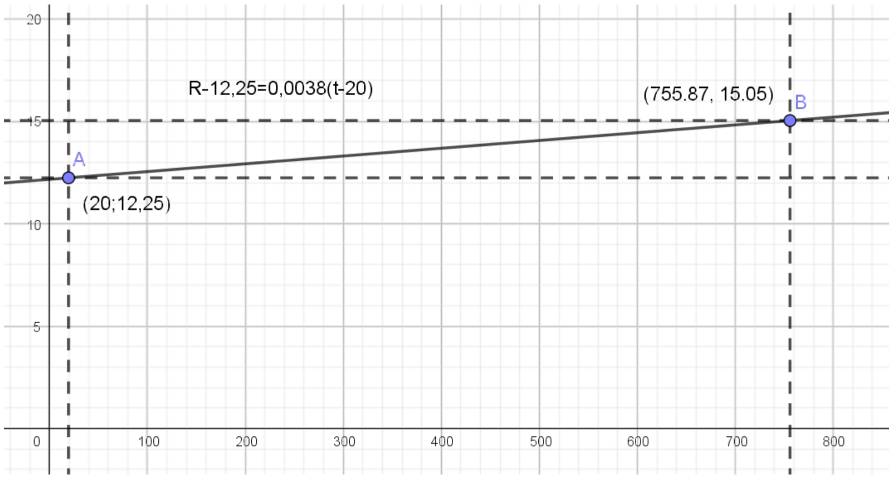
Po úpravě:

$$F_1 = \frac{mg \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad F_2 = \frac{mg \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

16. Měděné vinutí velkého elektromagnetu má při $t_0 = 20$ °C odpor $R_0 = 12{,}25\ \Omega$. Bylo-li delší dobu v provozu, zvýšil se jeho odpor na hodnotu $R = 15{,}05\ \Omega$. Jakou teplotu má vinutí? Pro změnu odporu a teploty platí vztah $R - R_0 = \alpha.(t - t_0)$, kde t je zvýšená teplota, α teplotní součinitel odporu. Pro měď je $\alpha = 0{,}0038\ \mathrm{K}^{-1}$. Zakreslete graf závislosti odporu vinutí na teplotě.

Řešení:

756 °C

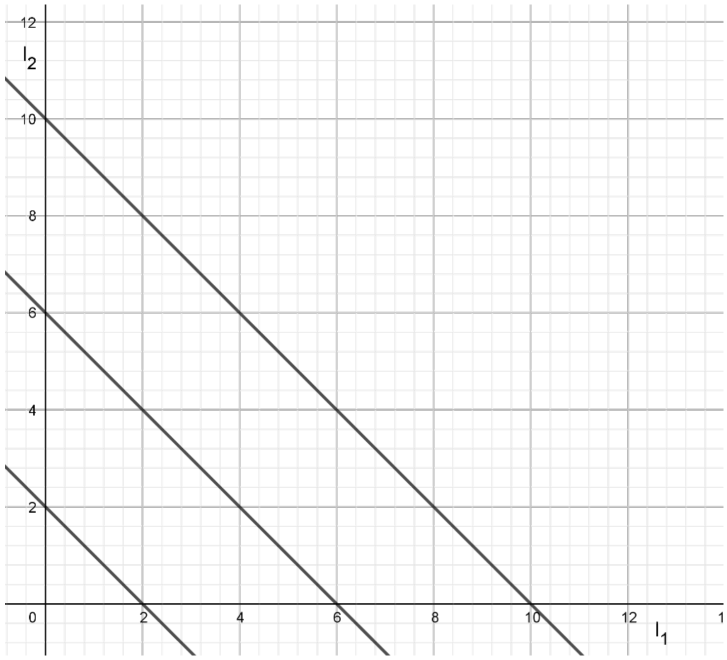


Graf 17. Analytická geometrie v rovině – příklad 16 – řešení

17. Součet elektrických proudů I_1 a I_2 protékajících dvěma paralelně zapojenými spotřebiči je I.
    a) Nakreslete graf závislosti proudů I_2 na I_1 pro celkovou hodnotu elektrického proudu 2 A, 6 A, a 10 A.
    b) Určete z grafu celkový proud I, jestliže víme, že má platit $I_2 = 4 \cdot I_1$ a $I_2 = 6 - 2 \cdot I_1$. K řešení úlohy využijte vhodný software.

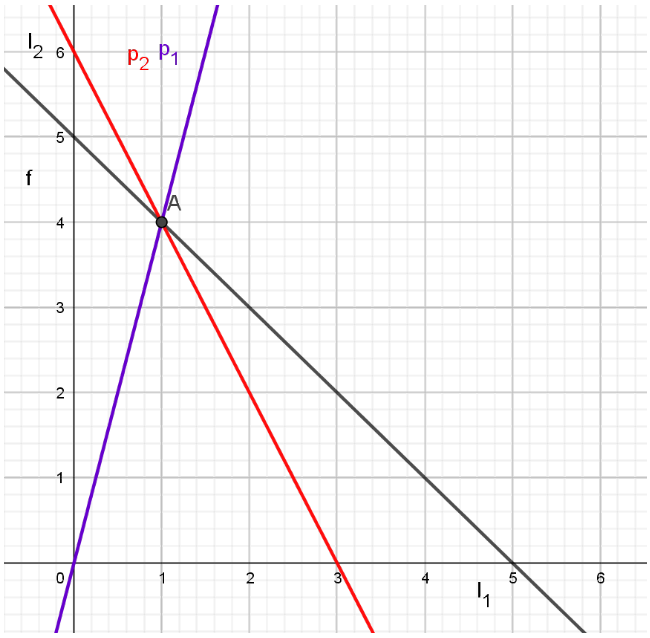
Řešení:

a) Jedná se o rovnoběžné přímky.



Graf 18. Analytická geometrie v rovině – příklad 17a – řešení

b) Řešením podmínek je průsečík přímek p_1 a p_2, bod A. Přímka f procházející bodem A odpovídá celkovému proudu 5 A.



Graf 19. Analytická geometrie v rovině – příklad 17b – řešení

18. Pro napětí na svorkách zdroje platí vztah $U = 24 - 0{,}5I - R.I$, kde R je hodnota odporu připojeného spotřebiče a I je proud odebíraný ze zdroje napětí.

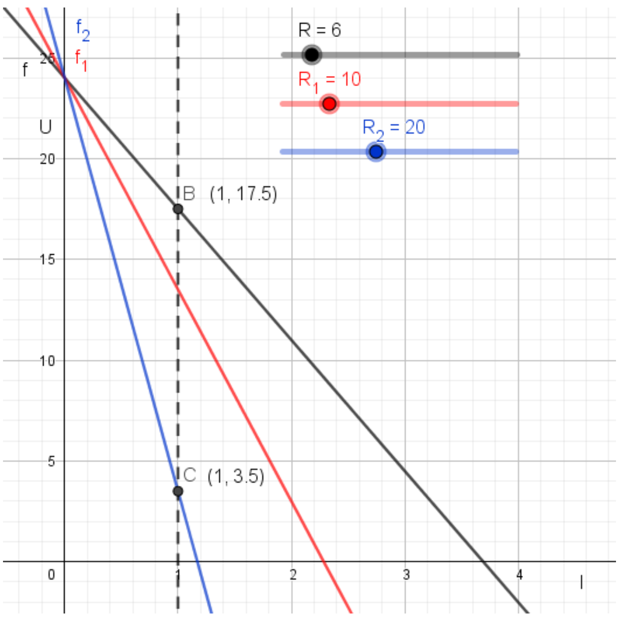
a) Určete rozdíl hodnot napětí U při změně hodnoty R ze 6 Ω na 20 Ω pro odebíraný proud 1 A.

b) Zakreslete graf závislosti svorkového napětí U na procházejícím proudu pro různé hodnoty odporu R.

Řešení:

Změna napětí je

17,5 V – 3,5 V = 14 V.



Graf 20. Analytická geometrie v rovině – příklad 18b – řešení

19. Výkon P spotřebiče se vypočítá podle vztahu $P = RI^2$, kde R je odpor spotřebiče a I je elektrický proud protékající spotřebičem. Máme-li dvě stejná topná tělesa o odporu 1 000 Ω, určete hodnoty proudů I_1 a I_2, které jimi protékají tak, aby:

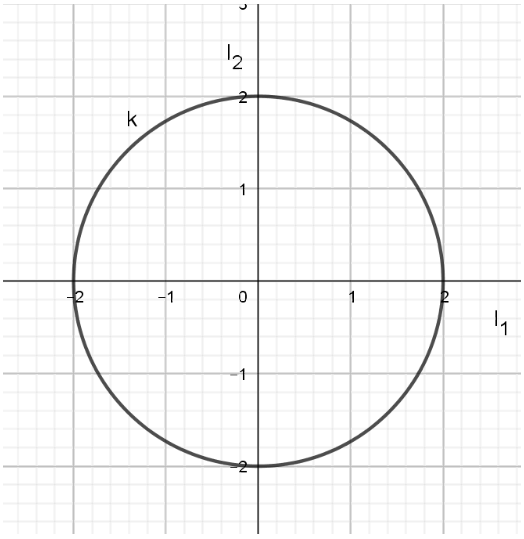
a) součet výkonů obou topných těles byl 4 kW;

b) společný výkon obou těles byl minimálně 25 kW s podmínkou, že velikost proudu ani jedním topným tělesem nesmí překročit 6 A.

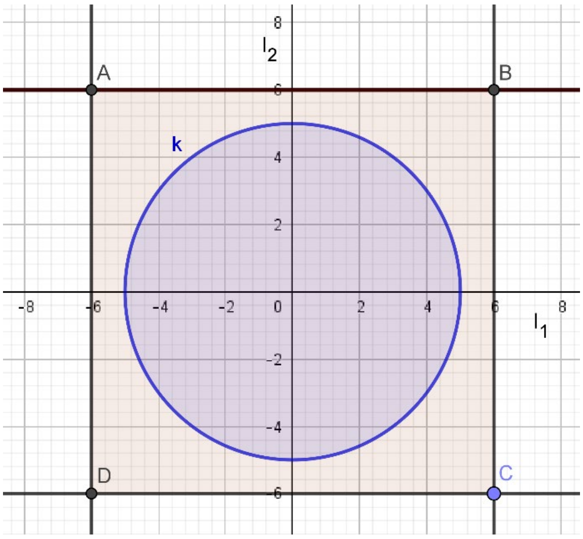
Řešení:

a) Hodnoty proudů I_1 a I_2 vyhovující podmínce tvoří v souřadné soustavě s osami I_1 a I_2 hodnoty na kružnici i rovnici $I_1^2 + I_2^2 = 4$.

b) V grafu soustavy souřadnic s osami I_1 a I_2 hodnoty v oblasti vymezené kružnicí k o rovnici $I_1^2 + I_2^2 = 25$ a čtvercem ABCD určeným přímkami $I_1 = \pm 6$ A, $I_2 = \pm 6$ A.



Graf 21. Analytická geometrie v rovině – příklad 19a – řešení



Graf 22. Analytická geometrie v rovině – příklad 19b – řešení

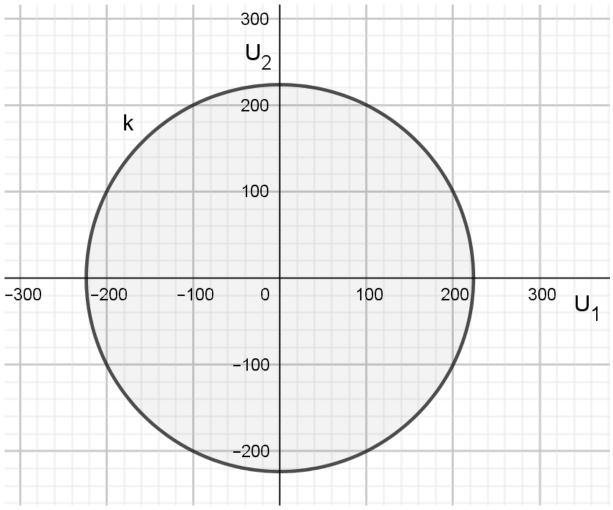
20. Výkon P spotřebiče se vypočítá podle vztahu $P = \frac{U^2}{R}$, kde R je odpor spotřebiče a U je elektrické napětí na spotřebiči. Jak velká napětí U_1 a U_2 musejí být na dvou spotřebičích o stejném odporu 1 000 Ω, aby:

a) součet výkonů spotřebičů byl větší než 50 W;

b) součet výkonů spotřebičů byl roven 50 W a součet obou napětí byl 230 V.

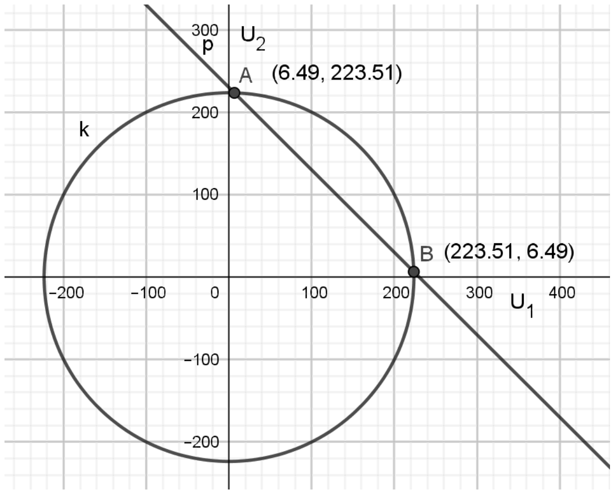
Řešení:

a) V grafu soustavy souřadnic s osami U_1 a U_2 se jedná o hodnoty vně kružnice k o rovnici $U_1^2 + U_2^2 = 50\,000$.



Graf 23. Analytická geometrie v rovině – příklad 20a – řešení

b) V grafu soustavy souřadnic s osami U_1 a U_2 se jedná o hodnoty vně kružnice k o rovnici $U_1^2 + U_2^2 = 50\,000$ a přímky p o rovnici $U_1 + U_2 = 230$. $U_1 = 6{,}49$ V, $U_2 = 223{,}51$ V a naopak.



Graf 24. Analytická geometrie v rovině – příklad 20b – řešení

21. Na obrázku je zakreslen fázorový diagram napětí $\boldsymbol{u}$ a proudu $\boldsymbol{i}$.

a) Činný výkon $P_č$ elektrického proudu ve střídavém obvodu počítáme jako skalární součin fázoru napětí $\boldsymbol{u}$ a proudu $\boldsymbol{i}$. $P_č = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{i}$. Vypočítejte činný výkon jako skalární součin vektorů (fázorů) na obrázku. Jednotky jsou A a V.

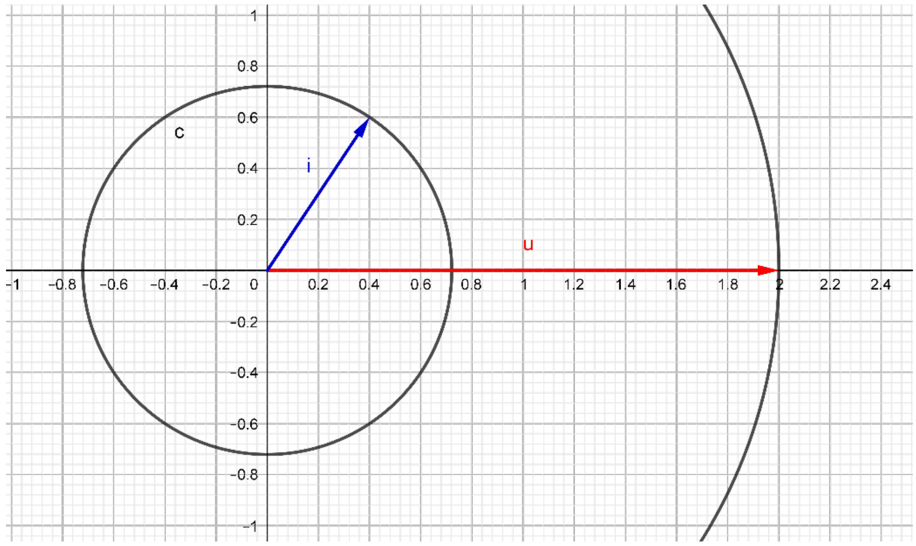
b) Úhel, který svírají fázory napětí $\boldsymbol{u}$ a proudu $\boldsymbol{i}$ se nazývá fázový rozdíl a značí se φ. Hodnota $\cos \varphi$ se nazývá účiník. Vypočítejte účiník $\cos \varphi$.

Řešení:

$\boldsymbol{u}$ (2 V; 0 V), $\boldsymbol{i}$ (0,4 A; 0,6 A)

a) $P_č = 0{,}8$ W

b) Pro výpočet účiníku můžeme využít poměru v pravoúhlém trojúhelníku v obrázku $\cos \varphi = 0{,}4 : 0{,}721 = 0{,}5547$.



Graf 25. Analytická geometrie v rovině – příklad 21 – zadání

22. Velikost magnetického indukčního toku Φ lze v případě homogenního magnetického pole počítat jako skalární součin vektoru magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ a vektoru rovinné plochy závitu **S**, tedy $\Phi = \boldsymbol{B} \,.\, \boldsymbol{S}$.

    a) Vypočítejte velikost magnetického indukčního toku Φ, jestliže $\boldsymbol{B}$ (0,2; 0,5) H a $\boldsymbol{S}$ (– 0,02; 0,09) m^2.

    b) Vypočítejte úhel mezi vektory $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{S}$.

    Řešení:

    a) $\Phi = 0{,}2\text{H} \,.\, (-\,0{,}02 \text{ m}^2) + 0{,}5 \text{ H} \,.\, 0{,}09 \text{ m}^2 = 0{,}041$ Wb

    b) $\cos \alpha = 0{,}041 : 0{,}050 = 0{,}826$, $\alpha = 34{,}3°$

23. V obvodu střídavého proudu je sériově zapojen rezistor o odporu R, cívka o indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C. Fázorové vektory efektivních hodnot napětí mají počátek v bodě [0; 0] a koncový bod pro rezistor je v bodě [12; 0], cívku v bodě [0; 15] a kondenzátor v bodě [0; – 10]. Narýsujte fázorový diagram obvodu, určete souřadnice a velikost vektoru výsledného napětí na všech třech sériově zapojených prvcích.

    Řešení:

    souřadnice: $\boldsymbol{U}$ (12; 5)

    velikost: $U = 13$ V

24. V obvodu střídavého proudu je sériově zapojen rezistor o odporu R a kondenzátor o kapacitě C. Fázorové vektory efektivních hodnot napětí v čase t mají počátek v bodě [0; 0], koncový bod pro rezistor je v bodě [4; 4] a kondenzátor v bodě [2; – 2]. Narýsujte fázorový diagram obvodu, určete souřadnice a velikost vektoru výsledného napětí na obou sériově zapojených prvcích.

Řešení:

souřadnice: $\boldsymbol{U}$ (6; 2)

velikost: $U = 2.\sqrt{10}$ V

25. V obvodu střídavého proudu je sériově zapojen rezistor o odporu R a cívka o indukčnosti L. Fázorové vektory efektivních hodnot napětí v čase t mají počátek v bodě [0; 0], koncový bod pro rezistor je v bodě [4; 2] a cívku v bodě [– 1; 2]. Narýsujte fázorový diagram obvodu, určete souřadnice a velikost vektoru výsledného napětí na obou sériově zapojených prvcích.

Řešení:

souřadnice: $\boldsymbol{U}$ (3; 4)

velikost: $U = 5$ V

26. V obvodu střídavého proudu je sériově zapojen kondenzátor o kapacitě C a cívka o indukčnosti L. Fázorové vektory efektivních hodnot napětí v čase t mají počátek v bodě [0; 0], koncový bod pro kondenzátor je v bodě [– 3; – 3] a cívku v bodě [2; 2]. Narýsujte fázorový diagram obvodu, určete souřadnice a velikost vektoru výsledného napětí na obou sériově zapojených prvcích.

Řešení:

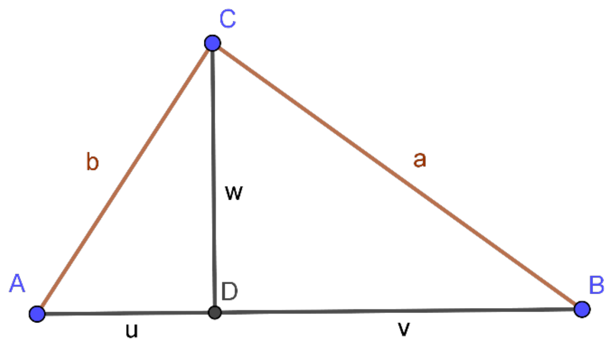
souřadnice: $\boldsymbol{U}$ (– 1; – 1)

velikost: $U = \sqrt{2}$ V

27. Tři svítidla se nacházejí ve vrcholech trojúhelníka ABC o stranách 150 cm, 120 cm, a 180 cm. Vypočítejte souřadnice jejich středů u, v a w na obrázku.

Řešení:

$u = 67{,}5$, $v = 112{,}5$, $w = 99{,}2$



Obrázek 23. Analytická geometrie v rovině – příklad 27 – zadání

9 Posloupnosti

1. Čtyři stupně otáček vrtačky tvoří geometrickou posloupnost. Nejmenší je 300 ot/min. Vypočtěte největší počet otáček, je-li kvocient 1,5.

   Řešení:

   1 013

2. Kolik převodových stupňů bude mít vrtačka, má-li mít nejmenší počet otáček 15 a největší 480 otáček za minutu? Podíl dvou sousedních převodových stupňů je 2.

   Řešení:

   $a_1 = 15$, $q = 2$, $a_n = 480$, $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$, $n = 6$

3. O kolik procent je nutné zvýšit výrobu za každý rok, aby za pět let vzrostla o 40 %?

   Řešení:

   a_0 – výroba na počátku, a_5 – výroba za 5 let

   $r = 1{,}06961 \quad \Rightarrow$ výroba se každý rok zvýší o 6,96 %

4. Na záporně nabité desce kondenzátoru je v daném okamžiku $3{,}7.10^{20}$ elektronů. Kondenzátor se vybíjí přes rezistor tak, že se každou sekundu zmenší počet elektronů na třetinu. Za jak dlouho klesne počet elektronů na desce na 10^{15}?

   Řešení:

   $3^{-t} \,.\, 3{,}7 \,.\, 10^{20} = 10^{15} \quad \Rightarrow \quad t = 11{,}67$ s

5. Jedním protažením se zmenší průměr drátu na 95 %. Má-li drát průměr 6 mm, jaký bude jeho průměr po 5 protaženích?

   Řešení:

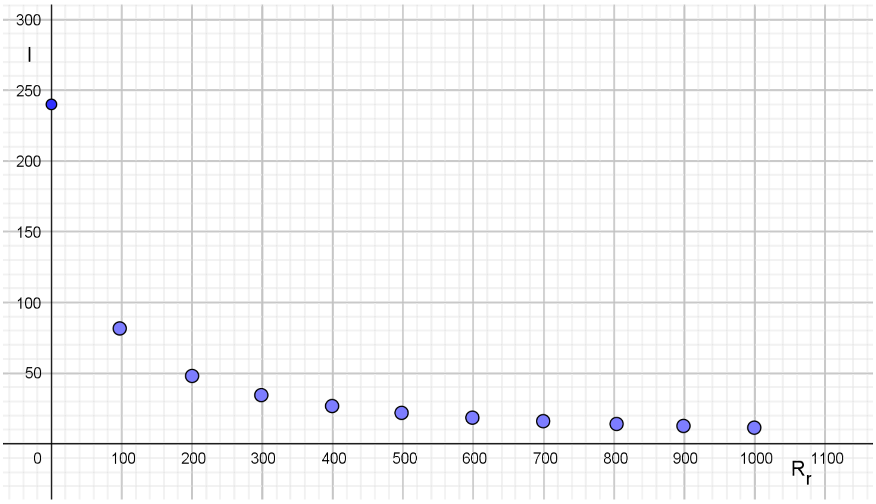
   $r = 1 - \dfrac{5}{100} = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_0 \,.\, r^5 = 6 \,.\, 0.95^5 = 4{,}64 \quad \Rightarrow$ průměr drátu bude 4,64 mm

6. Reostat má celkový odpor 1 000 Ω a můžeme jeho hodnotu měnit po 100 Ω. Určete hodnoty elektrického proudu I, který protéká reostatem a žárovkou o odporu $R_ž = 50\ \Omega$ připojenými sériově k napětí 12 V při všech polohách reostatu od 0 do 1 000 Ω. Pro hodnotu elektrického proudu platí $I = \dfrac{U}{R_Ž + R_r}$. Zakreslete graf závislosti velikosti protékajícího proudu na hodnotě odporu reostatu R_r.

Řešení:

Tabulka 2. Posloupnosti – příklad 6 – řešení

R_r [Ω]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
I [mA]	240	80	48	34	26,7	21,8	18,5	16	14,1	12,6	11,4



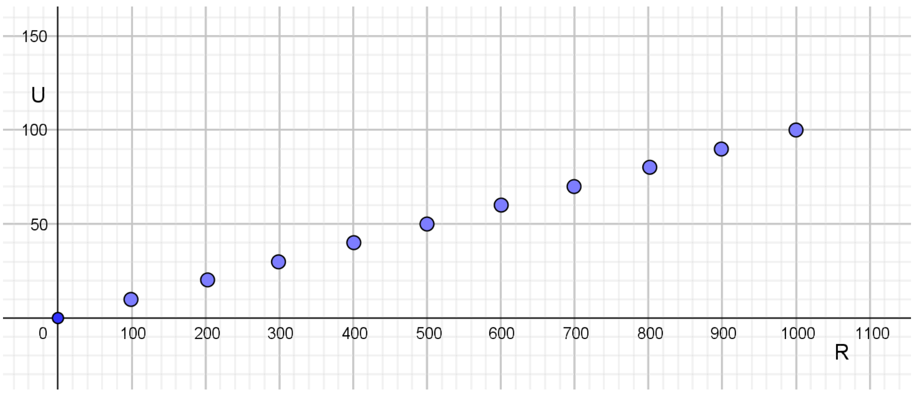
Graf 26. Posloupnosti – příklad 6 – řešení

7. Reostat mění svůj odpor R po 100 Ω od 0 Ω do 1 000 Ω. Vypočítejte hodnoty napětí na reostatu, protéká-li jím konstantní elektrický proud $I = 100$ mA. Sestrojte graf závislosti hodnot napětí U na odporech reostatu R. Popište vlastnosti získané posloupnosti číselných hodnot napětí.

Řešení:

Tabulka 3. Posloupnosti – příklad 7 – řešení

R [Ω]	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
U [V]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100



Graf 27. Posloupnosti – příklad 7 – řešení

Konečná aritmetická posloupnost s $d = 10$.

8. Ke zdroji napětí 1 000 V připojíme sériově spotřebič o odporu $R_s = 1\,000\ \Omega$ a rezistor R. Určete hodnoty rezistorů R, tak, aby proud, protékající obvodem měl hodnoty aritmetické posloupnosti s $I_1 = 1$ A a diferencí $d = -0,2$ A. Pro velikost proudu protékajícího obvodem platí vztah $I = \dfrac{U}{R_S + R}$.

Řešení:

Ze vztahu pro proud si vyjádříme R. $R = \dfrac{U - I.\,R_S}{I}$. Dosadíme hodnoty proudů a vypočítáme R.

Tabulka 4. Posloupnosti – příklad 8 – řešení

I [A]	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0
R [Ω]	0	250	666,7	1500	4000	nemá řešení

9. Měděné vodiče jsou uloženy ve dvanácti vrstvách. Spodní vrstva obsahuje 120 kusů. Kolik vodičů celkem je takto uloženo? (Každá vrstva obsahuje o jeden kus méně než vrstva pod ní ležící.)

Řešení:

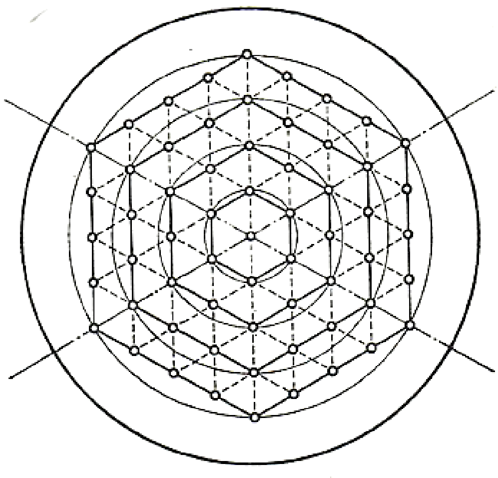
1 374 vodičů

10. Spodní vrstva složených betonových sloupů pro rozvod elektrické energie obsahuje 27 kusů, horní 17 kusů. Kolik je všech betonových sloupů?

Řešení:

242 sloupů

11. Na obrázku je trubkový výměník tepla v elektrárně.



Obrázek 24. Posloupnosti – příklad 11 – zadání

Pro konstrukci je běžná tato praxe: V kruhovém průřezu rozdělíme oba poloměry hlavního průměru na x dílů a vedeme dělicími body přímky pod úhlem 60° oběma směry. Tím vznikne síť rovnostranných trojúhelníků a každým vrcholem prochází jedna trubka. Obrázek lze doplnit rovnoběžkami s hlavním průměrem, čímž vzniknou pravidelné šestiúhelníky. Trubky jsou umístěny ve vrcholech a na stranách těchto šestiúhelníků. (Viz obr. 26.) Stanovte počet trubek podle rozdělení obvodu po kruhovém průřezu.

Řešení:

Trubky jsou umístěny ve vrcholech a na stranách těchto šestiúhelníků, takže tu jde o aritmetickou posloupnost, v níž $a_1 = 6$, $d = 6$. Jestliže označíme x počet rozdělení po kruhovém průřezu (počet rozdělení poloměru), pak $s_x = 3x^2 + 3x$. Připočteme-li trubku jdoucí středem obrazce, je celkový počet $n = 3x^2 + 3x + 1$.

12. Kolik rychlostí bude mít vrtačka, má-li mít nejmenší otáčky 12 ot./min, největší 305 ot./min a podíl sousedních otáček je 1,5?

Řešení:

$$n - 1 = \frac{1{,}405}{0{,}176} = 8\text{, } n = 9$$

13. Fréza o šesti rychlostech má nejmenší počet otáček 25 ot./min, největší počet 500 ot./min. Jaký je podíl počtu sousedních otáček?

Řešení:

$500 = 25q^5$, $q = 1{,}82$

14. O kolik procent ročně musíme zvyšovat výrobu elektrické energie, aby se za 8 let zvýšila o 114 %?

Řešení:

$p = 10\ \%$

15. Zesilovač má koeficient zesílení $A = 1{,}6$. Určete velikost napětí po zapojení pěti takových zesilovačů za sebou.

Řešení:

$U_2 = 1{,}6^5 . U_1 = 10{,}5 . U_1$

16. Měrný útlum koaxiálního kabelu používaného u televizních antén je 5 dB / 100 m. Pro útlum v dB platí vztah $B_p = 10\log\frac{P_1}{P_2}$.

a) Určete, o kolik procent výkonu signálu přijdete při délce kabelu 25 m.

b) Určete, o kolik procent výkonu signálu přijdete při délce kabelu 1 m.

c) Určete, o kolik procent výkonu signálu přijdete při délce kabelu 10 m.

d) Určete, o kolik procent výkonu signálu přijdete při délce kabelu 100 m.

Řešení:

a) $\frac{5}{4} = 10\log\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1 = 10^{0,125}.P_2 \Rightarrow P_2 = 0,75\,P_1 \Rightarrow$ přijdeme o 25 % výkonu

b) $\frac{5}{100} = 10\log\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1 = 10^{0,005}.P_2 \Rightarrow P_2 = 0,989\,P_1 \Rightarrow$ přijdeme o 1 % výkonu

c) $\frac{5}{10} = 10\log\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1 = 10^{0,05}.P_2 \Rightarrow P_2 = 0,891\,P_1 \Rightarrow$ přijdeme o 11 % výkonu

d) $5 = 10\log\frac{P_1}{P_2} \Rightarrow P_1 = 10^{0,5}.P_2 \Rightarrow P_2 = 0,316\,P_1 \Rightarrow$ přijdeme o 68 % výkonu

17. Kondenzátor je nabit na napětí 12 V. Po připojení ke spotřebiči klesá napětí na kondenzátoru exponenciálně, tak, že se kondenzátor vybije na napětí 3 V za 5 s. Urči hodnoty napětí na kondenzátoru každou sekundu procesu vybíjení.

Řešení:

$U_1 = 12$ V

$U_6 = U_1.k^5 \Rightarrow k^5 = 0,25 \Rightarrow k = 0,758$

$U_2 = 9,09$ V $U_3 = 6,89$ V $U_4 = 5,22$ V $U_5 = 3,96$ V $U_6 = 3$V

18. Po kolika taženích se vytáhne drát o průměru 4 mm na průměr 1 mm, zmenšuje-li se průměr každým tažením o 9 %?

Řešení:

$n = 15$

19. Drát na výrobu cívky o průměru 4,5 mm měl po osmi taženích průměr 2,5 mm. O kolik procent se zmenšuje průměr každým tažením?

Řešení:

$q = 0,93$, $p = 7$ %

10 Kombinatorika

1. Kolik různých svítidel můžeme sestavit, máme-li k dispozici pro každé svítidlo 6 možných typů provedení, dva různé typy skel (čiré a matné) a tři různé barvy žárovek (žlutou, červenou a bílou)?

   Řešení:

   $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$

2. V bedně je 18 stejných kondenzátorů a 16 stejných rezistorů. Kolika způsoby lze vybrat 7 výrobků, aby mezi nimi byly:

   a) 4 kondenzátory a 3 rezistory

   b) 6 kondenzátorů a 1 rezistor?

   Řešení:

   Protože nezáleží na pořadí prvků, jedná se o kombinace.

   a) $\binom{18}{4} \cdot \binom{16}{3} = 1\,713\,600$ způsobů

   b) $\binom{18}{6} \cdot \binom{16}{1} = 297\,024$ způsobů

3. Podnikatel zjistil, že 10 nabízených výrobků splňuje jeho kritéria. Z těchto 10 výrobků má určit 3, včetně pořadí, které stanoví jejich preferenci. Kolika způsoby to může provést?

   Řešení:

   $V_3(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

4. Kolik existuje devítimístných výrobních čísel stroje, která mají na prvním místě číslici 3 nebo 5 a poslední trojčíslí je složeno jen ze sudých číslic?

   Řešení:

   Na posledních třech místech hledaného devítimístného výrobního čísla může být jen jedna z pěti číslic 0, 2, 4, 6 a 8. Na prvním místě mohou být 2 číslice, a to 3 nebo 5. Na ostatních místech může být libovolná z desíti číslic, tedy 0 až 9.

   Takže ke každé ze dvou číslic na prvním místě čísla můžeme přiřadit libovolnou číslici z deseti číslic na druhém místě čísla a k ní můžeme přiřadit libovolnou číslici z deseti číslic na třetím místě čísla a tak dále, až na sedmém až devátém místě můžeme přiřadit jen jedno z pěti (sudých čísel).

Výsledek: $2 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 25\,000\,000$

5. Řemeslník má v obchodě koupit 2 zásuvky a 10 šroubů. Kolika způsoby může realizovat tento nákup do svého košíku, jestliže zásuvky vybírá z regálu, kde je jich 10, a šrouby z krabice s dvaceti kusy?

   Řešení:

   Protože nezáleží na pořadí, v jakém zásuvky do košíku vybere, jedná se o kombinace, a počet možností tedy je: $\binom{10}{2} = 45$

   Pro počet možných nákupů šroubů platí: $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!.10!} = 184\,756$

   Protože ke každé zásuvce můžeme přidat do košíku jeden z deseti šroubů, pak celkový počet nákupů získáme tak, že vynásobíme jednotlivé počty možností.

   Tedy: $45 \,.184\,756 = 8\,314\,020$

6. Kolika způsoby lze při kontrole jakosti vybrat 6 výrobků z 10 předložených?

   Řešení:

   $$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!.6!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

7. Mistr má určit práci pro 3 zaměstnance na jednu směnu. Má k dispozici 6 pracovišť. Kolika způsoby může přidělit pracoviště, jestliže jeden zaměstnanec může pracovat za celou směnu na dvou pracovištích?

   Řešení:

   První zaměstnanec dostane přidělena dvě pracoviště ze šesti. K této dvojici může být přidělena libovolná dvojice ze čtyř zbývajících pracovišť a poslední dvě pracoviště zbývají pro třetího zaměstnance $\binom{6}{2}.\binom{4}{2}.\binom{2}{2} = 90$.

8. Kolika způsoby můžeme rozmístit 7 pracovníků na sedm pracovišť? Kdybychom každý den chtěli rozmístit zaměstnance jinak, jak dlouho by trvalo, než by se rozmístění začalo opakovat?

Řešení:

Jestliže si označíme zaměstnance písmeny A, B, C, D, E, F, G, může být na prvním pracovišti zaměstnanec A až G, tedy 7 možností, na druhém místě už jen 6 zaměstnanců (jeden je už umístěn u 1. stroje), u třetího stroje jen pět zaměstnanců a tak dále, až poslední pracoviště zbude pro posledního zaměstnance.

Možnosti můžeme vyznačit do tabulky:

Tabulka 5. Kombinatorika – příklad 8 – řešení

<table>
<tr><th>1. stroj</th><th>2. stroj</th><th>3. stroj</th><th>4. stroj</th><th>5. stroj</th><th>6. stroj</th><th>7. stroj</th></tr>
<tr><td rowspan="16">A</td><td rowspan="13">B</td><td rowspan="9">C</td><td rowspan="6">D</td><td rowspan="2">E</td><td>F</td><td>G</td></tr>
<tr><td>G</td><td>F</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td>E</td><td>G</td></tr>
<tr><td>G</td><td>E</td></tr>
<tr><td rowspan="2">G</td><td>E</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>E</td></tr>
<tr><td>E</td><td>….</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>….</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>….</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>F</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>….</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Celkem: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$, resp. $V(7,7) = 5\,040$

$5\,040 : 365 = 13{,}8$

$5\,040 : 250 = 20{,}16$

Zaměstnance můžeme rozmístit 5 040 způsoby. Rozmístění by se začalo opakovat po téměř 14 letech v případě, že by pracovali i o sobotách i nedělích a svátcích. V případě práce jen v pracovní dny, při počtu 250 pracovních dnů v roce, by opakování začalo za 20 let.

9. Mistr má sestavit rozpis práce pro 5 zaměstnanců. Má k dispozici 5 pracovních pozic – příprava výroby (komponent), navíjení rotorů, výroba statorů, kompletování elektromotorů, balení a expedice výrobků.
   a) Kolika způsoby může rozdělit práci v jednom dnu (jedné směně), jestliže jeden zaměstnanec bude zastávat jednu pozici po celou směnu?
   b) Kolika způsoby může rozdělit práci na týden?
   c) Sestavte aspoň jeden rozpis práce pro 5 zaměstnanců na týden (5 směn) tak, aby se všichni zaměstnanci vystřídali na všech pozicích a strávili na nich stejný čas.
   d) Kolika způsoby může mistr rozdělit práci na týden, aby každý zaměstnanec strávil na každém stroji právě jednu nedělenou směnu?

Řešení:

a) Počet možností pro jeden den: 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

b) Počet možností za týden: 120 . 120 . 120 . 120 . 120 = 24 883 200 000

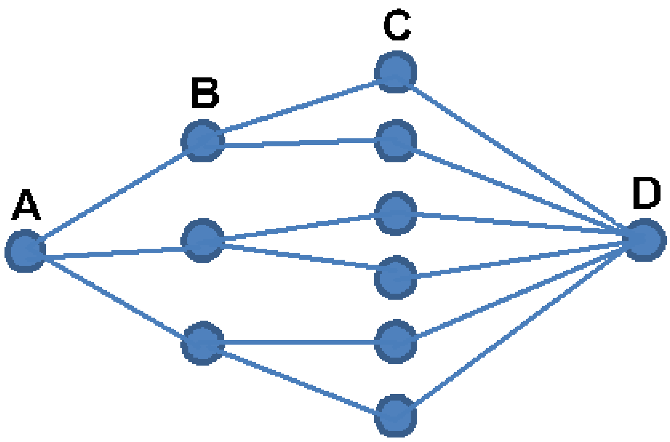
c)

Tabulka 6. Kombinatorika – příklad 9 – řešení

Den v týdnu	Pracovník číslo				
	Příprava výroby	Navíjení rotorů	Výroba statorů	Kompletace elektromotorů	Balení a expedice
Po	1	2	3	4	5
Út	2	3	4	5	1
St	3	4	5	1	2
Čt	4	5	1	2	3
Pá	5	1	2	3	4

d) Jedná se o problém, kolika způsoby lze přeskládat předchozí tabulku. Abychom zajistili v každém řádku i sloupci každé číslo jen jednou, musíme přerovnávat celé sloupce nebo celé řádky tabulky. Počet způsobů přerovnání řádků je 5! a počet přerovnání sloupců je 5!. Každá tabulka tam ale bude dvakrát. Tedy celkový počet možností je 5! . 5! : 2 = 7 200.

10. Kolika způsoby může vzniknout výrobek, jestliže začíná od skladníka A, který pošle komponenty třem zaměstnancům B, kteří obsluhují každý dva stroje C a od těch jdou výrobky k expedičnímu zaměstnanci D? Výrobky projdou po cestách, které vidíme na obrázku. Předpokládáme, že se výrobky nebudou nikde vracet.



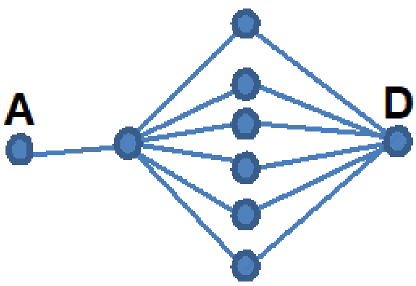
Obrázek 25. Kombinatorika – příklad 10 – zadání

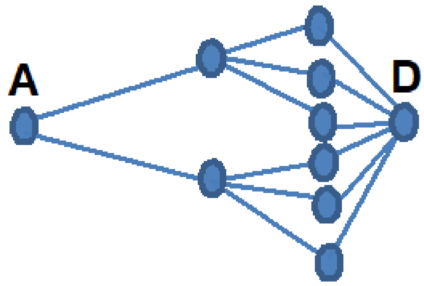
Nakreslete nějakou jinou mapu, kde výrobky projdou zleva doprava (nebudou se vracet) a budou mít stejný počet možností projít od skladu A k expedici D. Cesty se nesmějí křížit a větvení je možné jen mezi dělníky a stroji.

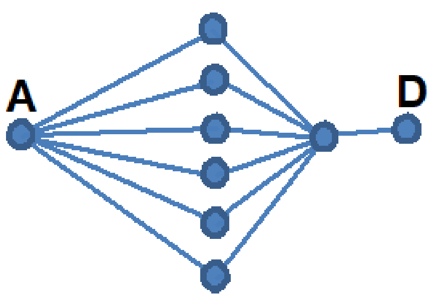
Řešení:

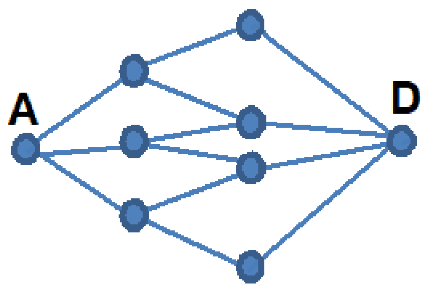
Ze skladu A může materiál vyrazit třemi cestami. U zaměstnance B má na výběr vždy ze dvou cest k některému stroji C a do expedice D může dorazit už jen po jediné cestě. Počet cest bude 1 . 3 . 2 . 1 = 6.

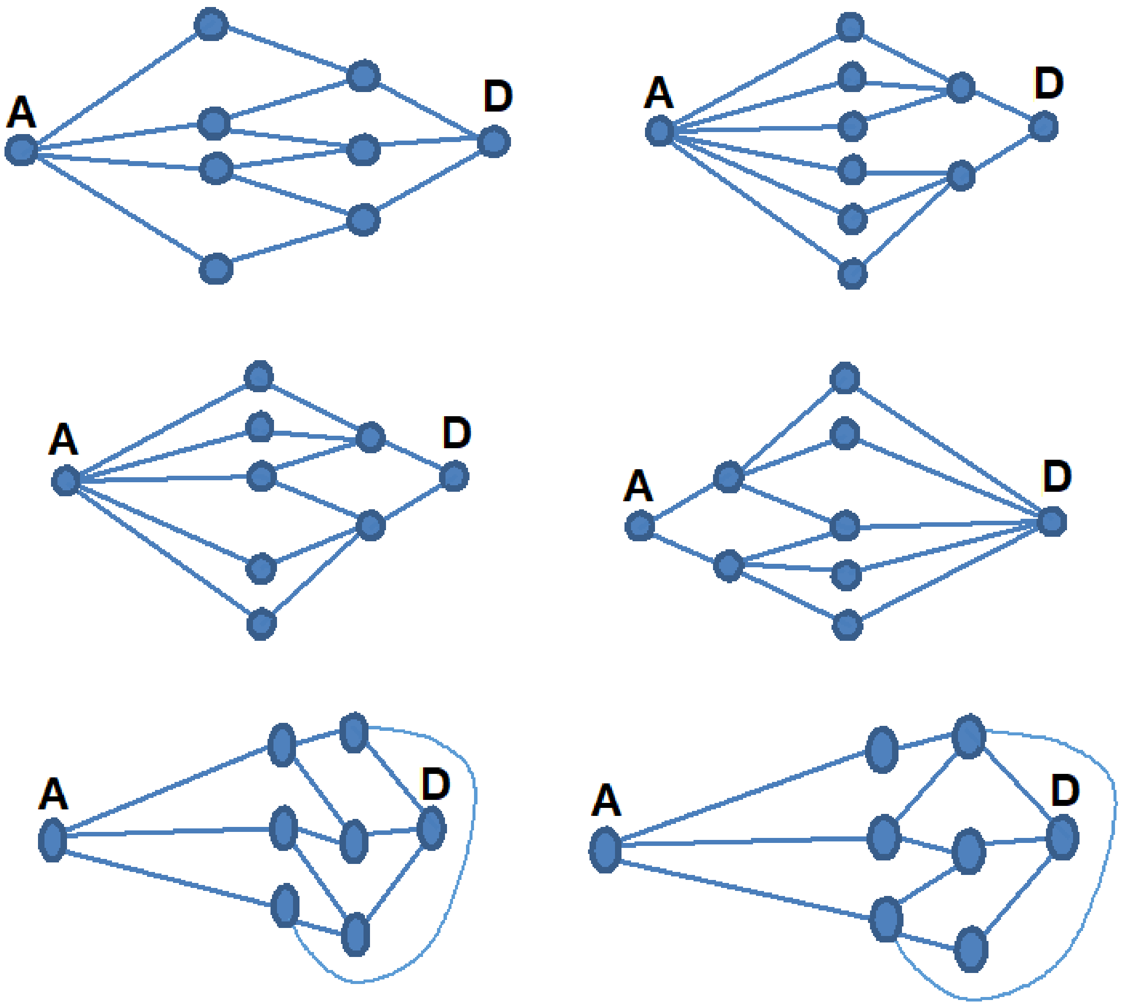
Jiné mapy mohou vypadat různě. Například:











Obrázek 26. Kombinatorika – příklad 10 – řešení

11. Stroj je chráněn proti neodborné manipulaci dvěma zámky. Jeden se otevře po správném zadání tří číslic (0 až 9), druhý se otevře po správném zadání čtyř číslic.

a) Kolik možností zadání obou kódů má zaměstnanec, který nezná správné pořadí číslic a chtěl by stroj zprovoznit?

b) Jak by se situace změnila, kdyby byl stroj chráněn jen jedním sedmimístným zámkem?

Řešení:

Varianta 1:

a) U třímístného zámku musí zaměstnanec vyzkoušet trojice (čísla) od 000 až po 999, což je 1 000 čísel. U čtyřmístného zámku musí vyzkoušet čtveřice (čísla) od 0000 až po 9999, tedy 10 000 možností. Celkem musí použít pro třímístný zámek 1 000 čísel a pro čtyřmístný 10 000 čísel, tedy celkem 11 000 čísel.

b) U sedmimístného zámku musí vyzkoušet trojice (čísla) od 0000000 až po 9999999, což je 10 000 000 čísel. Sedmimístný zámek je bezpečnější.

Varianta 2:

Zaměstnanec může použít číslice od nuly do devítky, tedy deset číslic.

a)

Tabulka 7. Kombinatorika – příklad 11 – řešení

1. pozice	2. pozice	3. pozice
0	0	0
		1
		2
		3
		4
		5
		6
		7
		8
		9
	1	0
		1
		….
		9
	….	….
	9	….
1	0	0
		1
		….
		9
	1	….
	….	….
	9	….
2	….	….
….	….	….
9	….	

Pro trojmístný zámek:

Ke každé číslici na prvním místě kódu může pracovník vyzkoušet deset číslic na druhém místě a ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě. V úplné tabulce by bylo 10 . 10 . 10 řádků, tedy 1 000 možností.

Pro čtyřmístný zámek:

Ke každé číslici na prvním místě kódu může pracovník vyzkoušet deset číslic na druhém místě, ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě a ke každé takové trojici může vyzkoušet deset číslic na čtvrtém místě. U čtyřmístného zámku by tabulka měla jeden sloupec navíc a počet všech čísel by stoupl na 10 . 10 . 10 . 10, tedy 10 000 možností.

Pro oba zámky by musel vyzkoušet 11 000 možností.

b) Ke každé číslici na prvním místě kódu může vyzkoušet deset číslic na druhém místě, ke každé takové dvojici může vyzkoušet deset číslic na třetím místě, ke každé takové trojici může vyzkoušet deset číslic na čtvrtém místě a tak dále až po sedmé místo. V tabulce by bylo 7 sloupců, tedy počet možností $10^7 = 10\ 000\ 000$. Bezpečnější je jeden sedmimístný zámek.

12. Tři spolužáci přijdou do obchodu kupovat každý jeden mobil. Mohou si klidně objednat všichni stejný model. Kolik možností nákupu mají, vybírají-li z pěti různých modelů?

Řešení:

$5^3 = 125$

13. Kolika způsoby lze zapojit dvě vidlice od dvou spotřebičů do tří dvojzásuvek, jestliže v jedné dvojzásuvce může být jen jedna vidlice?

Řešení:

Varianta 1:

Zapojené dvojzásuvky můžeme volit třemi způsoby a spotřebiče dvěma způsoby prohodit, tedy celkem 6 způsobů. Máme 4 možnosti zapojení vždy jedné ze dvou vidlic do dvojzásuvky. Celkem 6 . 4 = 24 možností zapojení.

Varianta 2:

Dvojzásuvky lze volit třemi způsoby a spotřebiče lze prohodit dvěma způsoby. Máme tedy 6 způsobů. Dále máme 4 možnosti zapojení u dvojzásuvek. Máme tedy dohromady 6 . 4 = 24 možností zapojení.

Varianta 3:

Vždy využijeme jen dvě ze tří dvojzásuvek, máme tři možnosti výběru dvou ze tří. U každé ze zvolených dvojic dvojzásuvek máme 8 možností různých zapojení. Tedy 3 . 8 = 24.

14. Železniční stanice je vybavená na dvou hradlech n návěstidly. Kolik odlišných návěstí se z nich dá sestavit, může-li mít každé z návěstidel 2 různá návěstí?

Řešení:

2^n

15. Uveďte kolika různými způsoby je možné rozdělit 12 součástek

a) na 2 stejně velké skupiny	A) nepřihlížíme-li k pořadí součástek ve skupině
b) na 3 stejně velké skupiny	B) přihlížíme-li k pořadí součástek ve skupině

Řešení:

aA) $C_6\,(12) = 924$	bA) $C_4\,(12) = 495$
aB) $V_6\,(12) = 665\,280$	bB) $V_4\,(12) = 11\,880$

16. Kolik čidel musí být ve vrcholech pravidelného n-úhelníku, aby počet propojení po úhlopříčkách bylo aspoň dvojnásobkem počtu propojení po obvodu n-úhelníku. Pro počet úhlopříček platí $\frac{n.(n-3)}{2}$.

Řešení:

$n \geq 7$

11 Pravděpodobnost

1. Na oddělení kontroly jakosti zjistili, že mezi 150 výrobky z provozu X je 10 vadných a mezi 200 výrobky z provozu Y je 5 vadných. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude vadný?

   Řešení:

   P(A) = 15/350 = 0,0429

2. V podniku byla provedena analýza poruchovosti stroje. Podle zadaných údajů určete pravděpodobnost poruchy tohoto stroje.

Tabulka 8. Pravděpodobnost – příklad 2 – zadání 1

rok	pracovní hodiny	
	bez poruchy	s poruchou
2004	25 030	1 740
2005	26 120	1 790
2006	26 320	1 810
2007	27 430	1 810
2008	27 510	1 780

Byla předložena 2 řešení. Posuďte obě řešení z hlediska provozu stroje.

Tabulka 9. Pravděpodobnost – příklad 2 – zadání 2

řešení A				řešení B			
rok	n_i	n	p_i	rok	n_i	n	p_i
2004	1 740	25 030	0,0695	2004	1 740	26 770	0,0650
2005	1 790	26 120	0,0685	2005	3 530	54 680	0,0646
2006	1 810	26 320	0,0687	2006	5 340	82 810	0,0645
2007	1 810	27 430	0,0660	2007	7 150	112 050	0,0638
2008	1 780	27 510	0,0647	2008	8 930	141 340	0,0632

n_i – počet pracovních hodin s poruchou

n – počet pracovních hodin stroje bez poruchy

p_i – relativní četnost (n_i/n)

n_i – počet pracovních hodin s poruchou

n – celkový počet pracovních hodin stroje

p_i – relativní četnost (n_i/n)

Řešení:

A. Uvedené hodnoty *p* jsou jen poměrem mezi počtem hodin s poruchou a počtem hodin bez poruchy v uvedených letech. Nejsou to pravděpodobnosti poruchy, neboť *n* není celkový počet hodin provozu stroje.

B. Celková pravděpodobnost poruchy stroje je asi 0,0632 (6,32 %).

3. V zásilce je 400 výrobků, z nichž 10 je vadných. Náhodně vybereme 4 výrobky (vybrané nevracíme během kontroly zpět). Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou:

   a) právě 3 vadné výrobky;

   b) nejvýše 3 vadné výrobky;

   c) alespoň 3 vadné výrobky?

Řešení:

a) $$\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{390}{1} . \binom{10}{3}}{\binom{400}{4}} = \frac{390 . 120}{1\,050\,739\,900} = 0{,}0000445$$

b) $$\mathrm{P}(B) = \frac{\binom{390}{4} . \binom{10}{0} + \binom{390}{3} . \binom{10}{1} + \binom{390}{2} . \binom{10}{2} + \binom{390}{1} . \binom{10}{3}}{\binom{400}{4}} =$$

$$= \frac{949\,173\,620 + 9\,810\,580 . 10 + 75\,855 . 45 + 390 . 120}{1\,050\,739\,900} = 0{,}999$$

Jednodušší řešení: $$\mathrm{P}(B) = 1 - \frac{\binom{360}{0} . \binom{10}{4}}{\binom{400}{4}} = 1 - 0{,}0000002$$

c) $$\mathrm{P}(C) = \frac{\binom{390}{1} . \binom{10}{3} + \binom{390}{0} . \binom{10}{4}}{\binom{400}{4}} = \frac{390 . 120 + 210}{1\,050\,739\,900} = 0{,}0000447$$

4. V bedně je 30 výrobků, z nichž jsou 3 vadné. Jaká je pravděpodobnost, že:

   a) mezi 5 náhodně vybranými výrobky není žádný vadný;

   b) mezi 5 náhodně vybranými výrobky jsou alespoň dva vadné;

   c) mezi 5 náhodně vybranými výrobky jsou nejvýše dva vadné?

Řešení:

a) $P(A)=\dfrac{\dbinom{27}{5}\cdot\dbinom{3}{0}}{\dbinom{30}{5}}=0{,}567$ b) $P(A)=\dfrac{\dbinom{27}{3}\cdot\dbinom{3}{2}+\dbinom{27}{2}\cdot\dbinom{3}{3}}{\dbinom{30}{5}}=0{,}064$

c) $P(A)=\dfrac{\dbinom{27}{5}\cdot\dbinom{3}{0}+\dbinom{27}{4}\cdot\dbinom{3}{1}+\dbinom{27}{3}\cdot\dbinom{3}{2}}{\dbinom{30}{5}}=0{,}99754$

Přes pravděpodobnost doplňkového jevu vyjde: 1 – 0,00246 = 0,99754

5. Závod vyrábí určitou součástku, která je podrobena třem různým zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraná součástka obstojí při první zkoušce, jev B v tom, že obstojí ve druhé zkoušce, a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Jak vyjádříme v množinové symbolice, že součástka obstojí:
   a) jen v první zkoušce;
   b) v první a ve druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce;
   c) právě v jedné zkoušce;
   d) alespoň v jedné zkoušce;
   e) právě ve dvou zkouškách;
   f) alespoň ve dvou zkouškách;
   g) ve všech třech zkouškách;
   h) maximálně dvakrát?

Řešení:

a) $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

b) $A\cap B\cap\overline{C}$

c) $\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)$

d) $\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap C\right)=$
$=A\cup B\cup C$

e) $\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)$

f) $\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap C\right)$

g) $\left(A\cap B\cap C\right)$

h) $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)=$

$= \overline{A\cap B\cap C}$

6. Automat má tři části – a_1, a_2 a b. Části a_1 a a_2 jsou v případě poruchy zastupitelné. Část b pracuje samostatně. Jev A_1 značí poruchu části a_1, jev A_2 poruchu části a_2 a jev B poruchu části b. Automat má poruchu, jestliže má poruchu část b nebo obě části a_1 a a_2. Vyjádřete tento jev C pomocí jevů A_1, A_2 a B.

   Řešení:

   $C = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup B$

7. Při kontrole obsahu určité látky ve směsi bylo zjištěno, že za normálních okolností mají v průměru 3 % směsí obsah nižší, než udává norma, a 5 % směsí má naopak obsah vyšší. Zbylých 92 % směsí je přesně v normě. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobená směs je mimo normu?

   Řešení:

   $P(A) = P\ (A_1) + P(A_2) = 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}08$

8. Pravděpodobnost vyrobení výrobku I. jakosti na stroji A je 0,9, na stroji B 0,8. Na stroji A mají být zhotoveny tři výrobky a na stroji B dva výrobky. Určete, s jakou pravděpodobností budou všechny výrobky I. jakosti.

   Řešení:

   $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}9$, $P(A_3) = 0{,}9$, $P(A_4) = 0{,}8$, $P(A_5) = 0{,}8$

   $P(A) = P(A_1)\ .\ P(A_2)\ .\ P(A_3)\ .\ P(A_4)\ .\ P(A_5) = 0{,}467$

9. K přerušení elektrického proudu dojde tehdy, když se vyřadí z provozu alespoň jeden ze tří za sebou spojených prvků. Určete pravděpodobnost toho, že se síť nepřeruší, jsou-li prvky vyřazovány z provozu po řadě s pravděpodobnostmi 0,3; 0,4 a 0,6. Jak se změní hledaná pravděpodobnost, jestliže první prvek není vyřazován z provozu?

   Řešení:

   jev A_1 – z provozu je vyřazen první prvek

   jev A_2 – z provozu je vyřazen druhý prvek

   jev A_3 – z provozu je vyřazen třetí prvek

   $P(A) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0{,}7\ .\ 0{,}6\ .\ 0{,}4 = 0{,}168$

   $P(B) = P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) = 0{,}6\ .\ 0{,}4 = 0{,}24$

10. Žák má dělat závěrečné zkoušky tříletého učebního oboru. Musí napsat písemku a udělat praktickou a ústní zkoušku. Protože se moc neučil, odhaduje svoje šance u všech zkoušek na 50 %.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že udělá všechny tři zkoušky na první pokus, předpokládáme-li, že výsledky zkoušek na sobě navzájem nezávisejí?
   b) Jakou pravděpodobnost úspěchu by musel mít u všech zkoušek, aby pravděpodobnost, že uspěje na první pokus, byla alespoň 50 %?

Řešení:

a) $P(A) = 0{,}5 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}5 = 0{,}125$

Jeho šance udělat závěrečnou zkoušku na první pokus je 12,5 %.

b) $P(X)^3 = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(X) = 0{,}7937$

11. Do bazénu přitéká voda třemi vzájemně nepropojenými čerpadly. K poruše prvního dojde s pravděpodobností 0,7, k poruše druhého s pravděpodobností 0,75 a k poruše třetího s pravděpodobností 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že dojde k poruše alespoň dvou čerpadel?

Řešení:

$$P(A) = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap B \cap C\right)$$

$0{,}7 \,.\, 0{,}75 \,.\, 0.2 + 0{,}7 \,.\, 0{,}25 \,.\, 0{,}8 + 0{,}3 \,.\, 0{,}75 \,.\, 0{,}8 + 0{,}7 \,.0{,}75 \,.\, 0{,}8 = 0{,}845$

12. Pravděpodobnost, že vyrobený počítač vydrží bez poruchy 2 roky, je 0,9. Vypočítejte pravděpodobnost, že všech 10 zakoupených počítačů vydrží bez poruchy 2 roky.

Řešení:

$P(A) = 0{,}9^{10} = 0{,}35$

13. Elektrotechnické zařízení je složeno z pěti nezávislých komponent. Jaká musí být pravděpodobnost, že každá komponenta vydrží bez poruchy 2 roky, aby výsledná pravděpodobnost, že celé zařízení vydrží bez poruchy 2 roky, byla nejméně 0,9?

Řešení:

$P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C) \,.\, P(D) \,.\, P(E) \geq 0{,}9.$

Řešení je nekonečně mnoho pětic čísel x z intervalu (0; 1), jejichž součin bude větší nebo roven 0,9. Pokud by měly být pravděpodobnosti všech komponent stejné, musely by být asi 0,98. Řešením ale mohou být i pravděpodobnosti 0,99; 0,99; 0,99; 0,99; 0,94.

14. Elektrický obvod máme sestavit z pěti rezistorů, tranzistoru a dvou kondenzátorů. Součástky vybíráme náhodně z krabičky s deseti rezistory, v níž je jeden vadný, z pěti bezvadných tranzistorů a z 8 kondenzátorů, z nichž jsou 2 vadné. Jaká je pravděpodobnost, že sestavené zařízení bude bezchybně fungovat? Je tento postup rozumný?

Řešení:

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}.\binom{5}{1}.\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}.\binom{5}{1}.\binom{8}{2}} = \frac{2\,700}{6\,300} = 0{,}43 \quad \Rightarrow$$ Postup není vhodný, pravděpodobnost vady je příliš vysoká.

15. Učitel vybere na začátku hodiny do košíku 20 mobilů. Úplně stejný mobil jako vy má dalších 5 spolužáků. Určete pravděpodobnost, že na konci hodiny, když sáhnete do košíku pro svůj mobil:

a. vytáhnete hned na první pokus svůj mobil, vybíráte-li jako první ze třídy
b. vytáhnete hned na první pokus svůj mobil, vybíráte-li jako druhý ze třídy

Řešení:

a) 0,2
b) 0,75 . 0,2 + 0,25 . 0,25 = 0,20

16. Obchod má ve skladu 12 ks mobilů značky, u které potřebuje opravu do dvou let každý pátý mobil. Určete pravděpodobnost, že aspoň jeden zakoupený mobil této značky bude potřebovat do dvou let opravu, koupíte-li si:

a. jeden mobil;
b. dva mobily;
c. tři mobily.

Řešení:

Počet mobilů, pokud je větší než počet kupovaných mobilů, nemá na výpočet vliv. Pravděpodobnost poruchového mobilu je 0,2.

a) $P(A) = 0{,}2$
b) $P(B) = 0{,}2.0{,}2 + 0{,}2.0{,}8 + 0{,}8.0{,}2 = 0{,}36$
c) $P(C) = 0{,}2^3 + 3 \,.\, 0{,}2 \,.\, 0{,}8^2 + 3 \,.\, 0{,}2^2 \,.\, 0{,}8 = 0{,}488$

17. V sérii 100 kusů výrobků jsme vybrali náhodně 5 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi nebude žádný zmetek, je-li zmetkovitost daného výrobku 4 %?

Řešení:

Počet všech možných případů je $C_5(100)$ a počet příznivých $C_5(96)$.

P(A) = 0,812

18. Ze série 100 kusů určitého výrobku vyhovovalo při předběžné kontrole 90 kusů a z nich při výstupní kontrole 75 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek, který vyhovoval při předběžné kontrole, vyhoví i při výstupní kontrole?

Řešení:

Výsledek předběžné kontroly – náhodný jev A, výsledek výstupní kontroly – náhodný jev B. P(A) = 90/100 = 0,9.

P(B/A) = 75:90 = 0,833.

19. Z celkového počtu hotových výrobků v určitém závodě vyhovělo při výstupní kontrole 96%. Z každé série 100 kusů vyhovujících výrobků odpovídá průměrně 75 kusů první kvalitě. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek má první kvalitu?

Řešení:

Vyhovující výrobky z celkového počtu – náhodný jev A, Výrobky první kvality z vyhovujících výrobků – náhodný jev B.

P(A) = 0,96, P(B/A) = 0,75.

$P(A \cap B) = 0{,}96.0{,}75 = 0{,}72$

20. Ze série 60 kusů výrobků, která obsahuje 4 zmetky, vybereme náhodně 9 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi těmito vybranými nebude žádný zmetek?

Řešení:

0,1025

21. Z bedny, v níž je 95 výrobků a 5 zmetků, vybereme náhodně 10 výrobků a ty překontrolujeme. Jaká je pravděpodobnost, že kromě jednoho všechny ostatní výrobky vyhovují?

Řešení:

0,0000088

22. Ze zásilky 20 kusů výrobků, z nichž 2 jsou zmetky, vybereme náhodně 5 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že je mezi nimi jeden vadný výrobek?

Řešení:

0,3947

23. V bedně je 40 kusů výrobků, z nichž 4 jsou vadné. Určete pravděpodobnost, že mezi 4 náhodně vybranými kusy bude maximálně 1 zmetek.

Řešení:

0,957

24. V sérii 30 kusů výrobků jsou 3 zmetky. S jakou pravděpodobností se mezi 5 náhodně vybranými vyskytnou maximálně 2 zmetky?

Řešení:

0,9976

12 Statistika a práce s daty

1. Při opakovaném měření proudu procházejícího obvodem při daném napětí byly naměřeny tyto hodnoty: 45,30 mA, 47,10 mA, 44,90 mA, 48,00 mA, 44,20 mA, 47,40 mA, 46,30 mA, 45,70 mA, 46,20 mA, 46,00 mA. Vypočítejte aritmetický průměr, medián, rozptyl a směrodatnou odchylku naměřených hodnot.

   Řešení:

   aritmetický průměr je 46,11 mA, medián je 46,10 mA, rozptyl je 1,22 mA, směrodatná odchylka je 1,10 mA

2. Je dán statistický soubor: 3,8; 4,1; 3,9; 3,4; 3,8; 3,9; 4,0; 3,5; 3,8; 3,8; 3,5; 4,0; 3,9; 3,8; 4,1.

   a) Vytvořte jednotlivé třídy četnosti, určete polygon četnosti (spojnicový diagram) a histogram kumulativní relativní četnosti.

   b) Vypočítejte aritmetický průměr, modus, medián, rozptyl, směrodatnou odchylku, variační rozpětí a variační koeficient.

   Řešení:

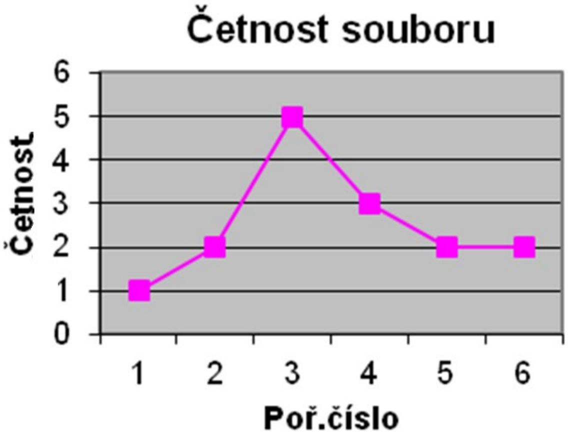
Tabulka 10. Statistika a práce s daty – příklad 2 – řešení

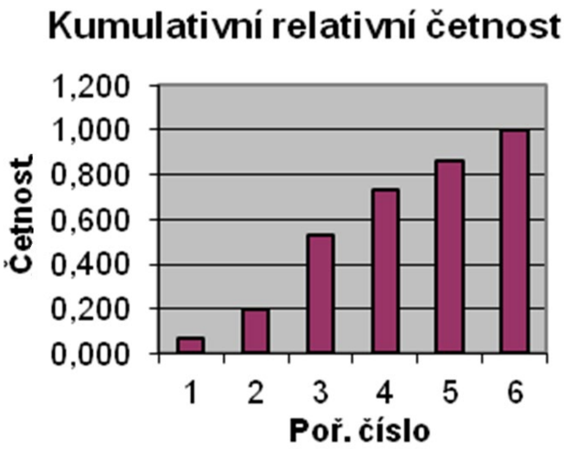
Pořadové číslo	x_i	Četnost n_i	Kumulativní četnost	Relativní četnost	Kumulativní relativní četnost	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	3,40	1	1	0,067	0,067	3,40	11,56
2	3,50	2	3	0,133	0,200	7,00	24,50
3	3,80	5	8	0,333	0,533	19,00	72,20
4	3,90	3	11	0,200	0,733	11,70	45,63
5	4,00	2	13	0,133	0,866	8,00	32,00
6	4,10	2	15	0,133	1,000	8,20	33,62
Celkem	***x***	**15**	***x***	**1,000**	***x***	**57,30**	**219,51**

modus: mod(x) = 3,8 medián: med(x) = 3,8 $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i . n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = 3,82$

$$s_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}.n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2 = 0{,}0416 \qquad s_x = \sqrt{s_x^{\,2}} = 0{,}204 \qquad v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.100 = 5{,}34\ \%$$

Variační rozpětí $R = 4{,}1 - 3{,}4 = 0{,}7$





Graf 28. Statistika a práce s daty – příklad 2 – řešení

3. 15 zaměstnanců vyrobí za směnu 8, 5, 9, 8, 6, 6, 10, 8, 7, 6, 9, 7, 8, 6, 7 výrobků. Vypočítejte průměrný počet výrobků vyrobených za směnu jedním zaměstnancem.

   Řešení:

   $$\bar{x} = \frac{110}{15} = 7{,}3$$

4. Zpracujte následující tabulku 50 hodnot získaných měřením a stanovte aritmetický průměr, modus, medián, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Tabulka 11. Statistika a práce s daty – příklad 4 – zadání

4,8	4,7	5,2	5,3	4,7	5,0	5,1	4,7	5,0	5,3
5,0	4,8	5,0	4,8	5,2	5,2	5,3	5,0	4,9	5,1
5,1	4,9	5,1	4,8	5,0	4,9	5,1	4,9	4,8	4,9
5,2	4,7	4,8	5,0	4,8	5,0	5,0	5,3	5,0	5,0
4,9	5,1	5,0	5,0	5,1	5,1	5,2	4,9	5,1	5,1

Řešení:

Tabulka 12. Statistika a práce s daty – příklad 4 – řešení

x_i	n_i	$x_i \, . \, n_i$	$x_i^2 \, . \, n_i$
4,7	4	18,8	88,36
4,8	7	33,6	161,28
4,9	7	34,3	168,07
5,0	13	65	325
5,1	10	51	260,1
5,2	5	26	135,2
5,3	4	21,2	112,36
Celkem	**50**	**249,9**	**1 250,37**

Aritmetický průměr:	$\bar{x} = \dfrac{249{,}9}{50} = 4{,}998$
Modus:	$\mathrm{mod}(x) = 5$
Medián:	$\mathrm{med}(x) = 5$
Rozptyl:	$s^2 = \dfrac{1\,250{,}37}{50} - 4{,}998^2 = 0{,}0274$
Směrodatná odchylka:	$s = \sqrt{s^2} = 0{,}1655$

5. Při měření byly zjištěny údaje v mm 0,69; 0,70; 0,73; 0,72; 0,71; 0,72; 0,70; 0,71; 0,71. Stanovte medián, modus, variační rozpětí, aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

Řešení:

$\mathrm{mod}(x) = 0{,}71$ $\quad R = 0{,}04$ $\quad s_x^2 = 0{,}0001\overline{3}$ $\quad v_x = 1{,}6\ \%$

$\mathrm{med}(x) = 0{,}71$ $\quad \bar{x} = 0{,}71$ $\quad s_x = 0{,}0115$

6. Vypočítejte průměrné náklady na jeden výrobek, máte-li tyto údaje:

Tabulka 13. Statistika a práce s daty – příklad 6 – zadání

Série	Počet výrobků	Náklady na jeden výrobek v Kč
01	200	2 900
02	250	2 850
03	500	2 700
04	430	2 650
05	180	2 850
06	730	2 750

Řešení:

$$\bar{x} = \frac{200 \, . \, 2\,900 + 250 \, . \, 2\,850 + 500 \, . \, 2\,700 + 430 \, . \, 2\,650 + 180 \, . \, 2\,850 + 730 \, . \, 2\,750}{2\,290} = 2\,752{,}20\ Kč$$

7. Statisticky zpracujte následující tabulku 50 hodnot délek získaných měřením (v cm) a stanovte aritmetický průměr, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

Tabulka 14. Statistika a práce s daty – příklad 7 – zadání

hodnota	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
počet	4	7	7	13	10	5	4

Řešení:

Tabulka 15. Statistika a práce s daty – příklad 7 – řešení

x_i	n_i	$x_i \,.\, n_i$	$x_i^2 \,.\, n_i$		
4,7	4	18,8	88,36	Aritmetický průměr:	$\bar{x} = \frac{249{,}9}{50} = 4{,}998$
4,8	7	33,6	161,28	Rozptyl:	$s^2 = \frac{1\,250{,}37}{50} - 4{,}998^2 = 0{,}0274$
4,9	7	34,3	168,07		
5,0	13	65	325	Směrodatná odchylka:	$s = \sqrt{s^2} = 0{,}1655$
5,1	10	51	260,1		
5,2	5	26	135,2	Variační koeficient:	$v_x = \frac{s_x}{x} = 0{,}033 = 3{,}3\,\%$
5,3	4	21,2	112,36		
Celkem	**50**	**249,9**	**1 250,37**		

8. V osmi sériích určitého druhu součástek byl zjišťován počet vadných součástek. Určete pravděpodobnost převzetí vadné součástky.

Tabulka 16. Statistika a práce s daty – příklad 8 – zadání

Série	Počet dodaných součástek	Počet vadných součástek
1	741	32
2	843	36
3	654	28
4	699	30
5	766	33
6	674	29
7	882	38
8	810	35
Celkem	6 069	261

Řešení:

Z tabulky odhadneme pravděpodobnost převzetí vadné součástky na 0,043.

9. Uvažujme produkci dvou závodů. Produkce závodu A se vyjadřuje v kusech, v závodě B v tunách. Na základě údajů v tabulce posuďte, ve kterém ze závodů byla během dekády výroba rovnoměrnější.

Tabulka 17. Statistika a práce s daty – příklad 9 – zadání

Série	Produkce závodu A (1 000 ks) x_i	Produkce závodu B (tuny) y_i
1	1	6
2	2	6
3	2	5
4	3	8
5	2	9
6	4	4
7	2	4
8	1	6
9	2	7
10	4	7

Řešení:

Rovnoměrnost vypočítáme porovnáním variačních koeficientů. Čím je koeficient menší, tím je výroba rovnoměrnější.

$$s_x^2 = \frac{63}{10} - 2{,}3^2 = 1{,}01 \quad \Rightarrow \quad s_x = 1 \qquad\qquad s_y^2 = \frac{408}{10} - 6{,}2^2 = 2{,}36 \quad \Rightarrow \quad s_y = 1{,}54$$

$$V_x = \frac{1}{2{,}3} = 0{,}43 = 43\ \% \qquad\qquad V_y = \frac{1{,}54}{6{,}2} = 0{,}25 = 25\ \%$$

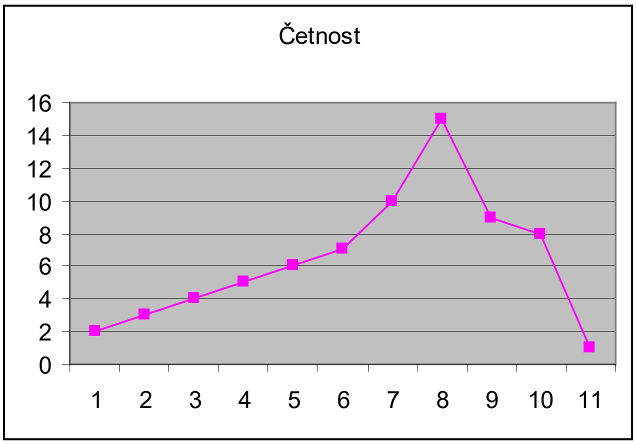
Výroba byla rovnoměrnější v závodě B.

10. Určete aritmetický průměr, modus, medián a načrtněte polygon četnosti, máte-li k dispozici tyto údaje:

Tabulka 18. Statistika a práce s daty – příklad 10 – zadání

Hodnoty znaku	Četnosti	Hodnoty znaku	Četnosti
1	2	7	10
2	3	8	15
3	4	9	9
4	5	10	8
5	6	11	1
6	7		

Řešení:



$\bar{x} = 6{,}77$

$\mathrm{med}(x) = 7$

$\mathrm{mod}(x) = 8$

Graf 29. Statistika a práce s daty – příklad 10 – řešení

11. V podniku, který má 700 zaměstnanců, máme k dispozici hodinové mzdy jednotlivých pracovníků:

Tabulka 19. Statistika a práce s daty – příklad 11 – zadání

Interval hodinových mezd v Kč	Muži	Ženy
120 – 129,9	40	24
130 – 139,9	80	36
140 – 149,9	100	60
150 – 159,9	150	48
160 – 169,9	90	20
170 – 179,9	25	12
180 a více	15	0
Celkem	**500**	**200**

Určete relativní četnost, průměrnou mzdu, rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient jak pro mzdy mužů, tak žen.

Řešení:

Tabulka 20. Statistika a práce s daty – příklad 11 – řešení

Interval hodinových mezd v Kč	Absolutní četnost		Relativní četnost		S. I.	Muži	Ženy	Muži	Ženy
	Muži	Ženy	Muži	Ženy					
	n_i				x_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
120 – 129,9	40	24	0,08	0,12	125	5 000	3 000	625 000	375 000
130 – 139,9	80	36	0,16	0,18	135	10 800	4 860	1 458 000	565 100
140 – 149,9	100	60	0,2	0,3	145	14 500	8 700	2 102 500	1 261 500
150 – 159,9	150	48	0,3	0,24	155	23 250	7 440	3 603 750	1 153 200
160 – 169,9	90	20	0,18	0,1	165	14 850	3 300	2 450 250	544 500
170 – 179,9	25	12	0,05	0,06	175	4 375	2 100	765 625	367 500
180 a více	15	0	0,03	0	185	2 775	0	513 375	0
Celkem	500	200	1	1	x	75 550	29 400	11 518 500	4 357 800

S. I. – středy intervalů

$$\overline{x_m} = \frac{75\,550}{500} = 151{,}1 \qquad s_m^{\ 2} = \frac{11\,518\,500}{500} - 151{,}1^2 = 205{,}79$$

$$s_m = \sqrt{205{,}79} = 14{,}345 \qquad v_m = \frac{14{,}345}{151{,}1} = 0{,}095$$

$$\overline{x_z} = \frac{29\,400}{200} = 147 \qquad s_z^{\ 2} = \frac{4\,357\,800}{200} - 147^2 = 180$$

$$s_z = \sqrt{180} = 13{,}42 \qquad v_z = \frac{13{,}42}{147} = 0{,}091$$

13 Komplexní čísla

Úvodní poznámka

K popisu dějů v obvodu střídavého proudu se v elektrotechnice používá tzv. symbolická metoda. V ní jsou veličiny vztažené k dějům v obvodu střídavého proudu vyjádřeny komplexními čísly. V Gaussově rovině jsou vyjádřeny orientovanými úsečkami, jejichž počáteční bod je v čísle (0,0) a koncový v obraze komplexního čísla přiřazeného dané veličině (tzv. fázory). Imaginární jednotka se značí j, aby se odlišilo značení od proměnných hodnot elektrického proudu *i*. Fázory se značí velkými písmeny, např. ***U*, *I*, *Z*,** a vyjadřují se:

a) v složkovém tvaru $\boldsymbol{Z} = a + \mathrm{j}\,.\,b$

b) v goniometrickém tvaru $\boldsymbol{Z} = Z\,.\cos\varphi + \mathrm{j}\,.\,Z\,.\sin\varphi$;

c) v exponenciálním tvaru $\boldsymbol{Z} = Z\,.\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$;

d) $Z = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{Z}, \cos\varphi = \dfrac{a}{Z^{/}}$, komplexně sdružené číslo k $\boldsymbol{Z}$ je $\boldsymbol{Z}^{*} = Z\,.\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$.

1. Převeďte následující fázory do exponenciálního tvaru:

   a) $\boldsymbol{Z} = (1{,}5 - \mathrm{j}\,.\,2)\ \Omega$

   b) $\boldsymbol{U} = (3 + \mathrm{j}\,.\,4)\ \mathrm{V}$

   c) $\boldsymbol{I} = (5 + \mathrm{j}\,.\,3)\ \mathrm{A}$

   d) $\boldsymbol{Z} = (1 - \mathrm{j}\,.\,4)\ \Omega$

   Řešení:

   a) $2{,}5.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,.\,0{,}93}\ \Omega$

   b) $5.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,.\,0{,}93}\ \mathrm{V}$

   c) $5{,}8.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,.\,0{,}54}\ \mathrm{A}$

   d) $4{,}12.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.1{,}33}\ \Omega$

2. V obvodu střídavého proudu je zapojen spotřebič. Určete jeho impedanci $\boldsymbol{Z} = \dfrac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I}}$. je-li

   $\boldsymbol{U} = 12{,}0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}.\frac{\pi}{6}}\ \mathrm{V}$, $\boldsymbol{I} = 5{,}0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}.\frac{\pi}{3}}\ \mathrm{A}$

   Řešení:

   $\boldsymbol{Z} = 2{,}4.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.\frac{\pi}{6}}\ \Omega$

3. Převeďte do součtového tvaru:

   a) $\boldsymbol{I} = 8.\ (\cos 60^0 + \mathrm{j}.\ \sin 60^0)\ \mathrm{A}$

   b) $\boldsymbol{U} = 15.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{V}$

Řešení:

a) $\boldsymbol{I} = (4 + \mathrm{j}.\ 4.\sqrt{3})$ A

b) $\boldsymbol{U} = (\ 7{,}5.\sqrt{2}\ - \mathrm{j}.7{,}5.\sqrt{2}\ )$ V

4. Určete fázový posun φ, tj. úhel mezi fázory $\boldsymbol{U} = 12{,}0.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.\frac{\pi}{3}}$ V, $\boldsymbol{I} = 10.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}.\frac{\pi}{3}}$ A

Řešení:

$\varphi = 0$

5. K fázoru $\boldsymbol{Z} = (8 + \mathrm{j}.6)\ \Omega$ určete fázor komplexně sdružený.

Řešení:

$\boldsymbol{Z^*} = (8 - \mathrm{j}.6)\ \Omega$

6. Obvodem s impedancí $\boldsymbol{Z} = (1 - 2\mathrm{j})\ \Omega$ prochází proud $\boldsymbol{I} = (3 - 2\mathrm{j})$ A. Určete napětí $\boldsymbol{U}$ zdroje, ke kterému je připojen. Využijte vztah $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\ .\ \boldsymbol{Z}$.

Řešení:

$\boldsymbol{U} = (-\ 1 - 8\mathrm{j})$ V

7. Obvod s impedancí $\boldsymbol{Z} = (2 - \mathrm{j})\ \Omega$ je připojen ke zdroji o napětí $\boldsymbol{U} = (5 + 2\mathrm{j})$ V. Určete proud $\boldsymbol{I}$ procházející obvodem. Využijte vztah $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\ .\ \boldsymbol{Z}$.

Řešení:

$\boldsymbol{I} = (1{,}6 + 1{,}8\mathrm{j})$ A

8. Obvodem připojeným ke zdroji o napětí $\boldsymbol{U} = (2 + 3\mathrm{j})$ V prochází proud $\boldsymbol{I} = (1 - \mathrm{j})$ A. Určete impedanci obvodu Z. Využijte vztah $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}\ .\ \boldsymbol{Z}$.

Řešení:

$\boldsymbol{Z} = (-\ 0{,}5 + 2{,}5\mathrm{j})\ \Omega$

9. Určete impedanci $\boldsymbol{Z}$ obvodu tvořeného dvěma paralelně zapojenými prvky s impedancemi $\boldsymbol{Z_1} = (1 + \mathrm{j})\ \Omega$ a $\boldsymbol{Z_2} = (2 - 5\mathrm{j})\ \Omega$. Využijte vztah $\boldsymbol{Z} = \dfrac{\boldsymbol{Z_1}.\boldsymbol{Z_2}}{\boldsymbol{Z_1} + \boldsymbol{Z_2}}$.

Řešení:

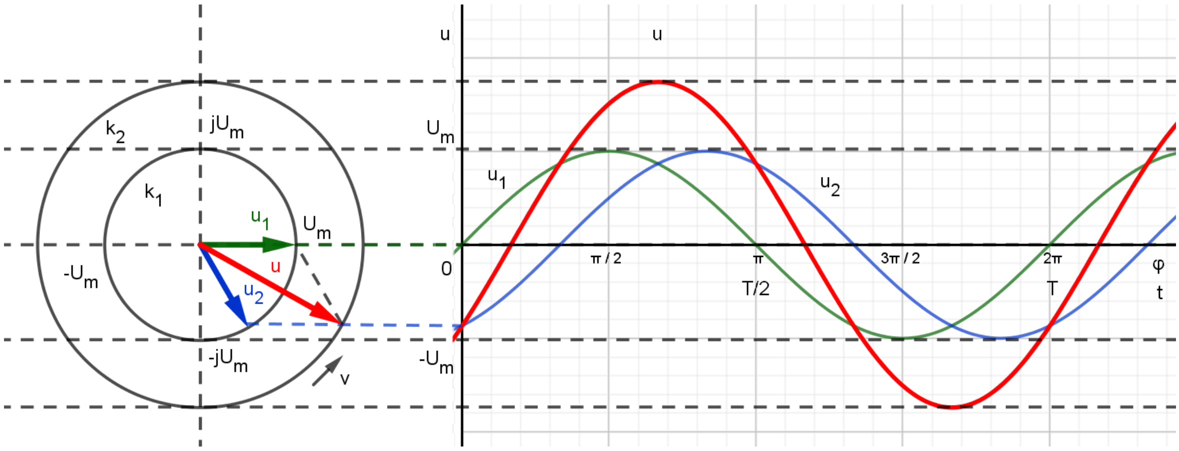
$\boldsymbol{Z} = (1{,}32 + 0{,}76\mathrm{j})\ \Omega$

10. Dva zdroje harmonického signálu generují napětí o stejné frekvenci a amplitudě U_m. Jejich fázový rozdíl je 60°. Určete velikost a průběh výsledného složeného napětí. Napětí

prvního zdroje je popsáno vztahem $u_1 = U_m \,.\, \sin(\omega t)$. Napětí druhého zdroje se opožďuje o 60°, tedy π/3, a je popsáno vztahem $u_2 = U_m \,.\, \sin(\omega t - \pi/3)$.

Řešení:

Situaci můžeme znázornit dvěma fázory $\boldsymbol{u_1}$ a $\boldsymbol{u_2}$, které rotují proti směru hodinových ručiček v rovině komplexních čísel a svírají mezi sebou úhel 60°. Koncové body fázorů $\boldsymbol{u_1}$ a $\boldsymbol{u_2}$ generují sinusoidy popisující závislost napětí na fázi φ nebo případně na čase t. Výsledné napětí u generuje fázor, který vznikne vektorovým součtem fázorů $\boldsymbol{u_1}$ a $\boldsymbol{u_2}$.



Graf 30. Komplexní čísla – příklad 10 – řešení

$\boldsymbol{u_1} = U_m.(\cos 0° + \mathrm{j}.\sin 0°) = U_m$

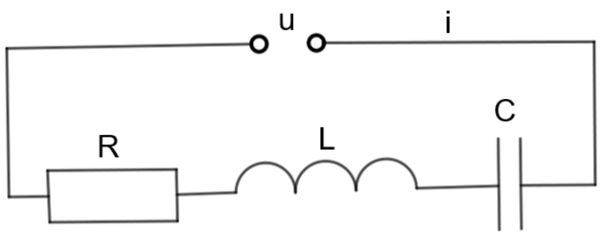
$\boldsymbol{u_2} = U_m.[\cos(-60°) + \mathrm{j}.\sin(-60°)] = 0{,}5U_m + \mathrm{j}.0{,}866U_m$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} = 1{,}5U_m + \mathrm{j}.0{,}866U_m$

Výsledné napětí u má velikost $|\boldsymbol{u}| = U_m.\sqrt{1{,}5^2 + 1{,}866^2} = 1{,}732\,U_m$

Napětí u se opožďuje za napětím u_1 prvního zdroje o 30°.

11. V obvodu, kterým protéká harmonický střídavý proud $i = I_m \,.\, \sin(\omega t)$ je zapojen sériově ideální rezistor o odporu R, cívka o indukčnosti L a kondenzátor o kapacitě C. Vypočítejte velikost impedance obvodu a výsledné napětí $u = U_m \,.\, \sin(\omega t + \varphi)$ v obvodu. I_m a U_m jsou maximální hodnoty napětí a proudu (velikosti fázorů). ω je úhlová frekvence a φ je fázový rozdíl mezi proudem a napětím.



Obrázek 27. Komplexní čísla – příklad 11 – zadání

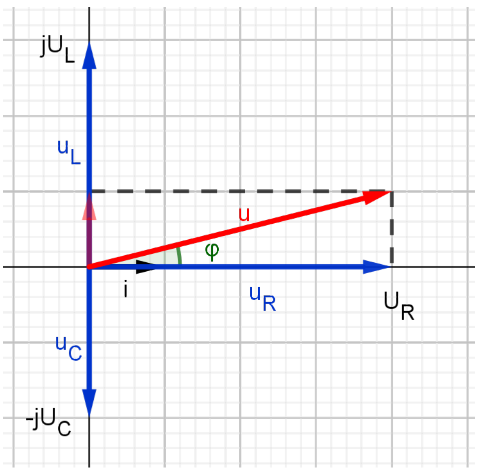
Při sériovém zapojení je elektrický proud všemi spotřebiči stejný. U ideální cívky předbíhá napětí proud o 90° a u ideálního kondenzátoru je tomu naopak, tedy předbíhá proud napětí o 90°.

Pro ideální součástky je velikost kapacitní reaktance kondenzátoru $X_C = 1/(\omega C)$, velikost indukční reaktance cívky $X_L = \omega L$ a reaktance rezistoru je R. Napětí na spotřebiči získáme jako součin reaktance spotřebiče a protékajícího proudu. Impedance $\boldsymbol{Z}$ je součet reaktancí všech spotřebičů v obvodu (celkový odpor obvodu vůči střídavému proudu). $U_m = I_m \cdot |Z|$.

Nejprve řešte problém obecně a pak pro hodnoty $I_m = 1$ A, $\omega = 100\pi$ Hz, $R = 1$ kΩ, $L = 100$ mH a $C = 20$ µF.

Řešení:

Pokud uvažujeme rotaci fázorů proti směru hodinových ručiček a vycházíme ze stejného fázoru $\boldsymbol{i}$ pro všechny tři součástky, získáme 3 kolmé fázory $\boldsymbol{u_L}$, $\boldsymbol{u_C}$ a $\boldsymbol{u_R}$ na obrázku. Výsledné napětí $\boldsymbol{u}$ je vektorový součet všech tří fázorů napětí pro jednotlivé součástky.



Obrázek 28. Komplexní čísla – příklad 11 – řešení

$\boldsymbol{u_R} = R\,.\,\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{u_L} = \mathrm{j}\,\omega L\,.\,\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{u_c} = -\dfrac{1}{\omega C}.\mathrm{j}.\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_L} + \boldsymbol{u_C} + \boldsymbol{u_R}$

$\boldsymbol{u} = (R + \mathrm{j}\,\omega L - \dfrac{1}{\omega C}.\mathrm{j}).\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Z}\,.\,\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{u} = (R + \mathrm{j}\,\omega L - \dfrac{1}{\omega C}.\mathrm{j}).\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega L - \dfrac{1}{\omega C}.\mathrm{j}$

$$\left|Z\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{(\omega C)^2}\right)}$$

$\cos\varphi = R : |Z|$

$u = |Z|.I_m\,.\,\sin(\omega t + \varphi)$

Po dosazení konkrétních hodnot dostaneme:

$\boldsymbol{Z} = (1000 - 127{,}74\,\mathrm{j})\ \Omega$

$\boldsymbol{u} = (1000 - 127{,}74\,\mathrm{j})\ \mathrm{V}$

$|Z| = 1008\ \Omega$

$u = [1\,008\,.\,\sin(100\,\pi t - 0{,}127)]\ \mathrm{V}$

14 Seznam tabulek, grafů a obrázků

14.1 Seznam tabulek

Tabulka 1. Algebra – příklad 15 – řešení ... 19
Tabulka 2. Posloupnosti – příklad 6 – řešení ... 70
Tabulka 3. Posloupnosti – příklad 7 – řešení ... 70
Tabulka 4. Posloupnosti – příklad 8 – řešení ... 71
Tabulka 5. Kombinatorika – příklad 8 – řešení ... 76
Tabulka 6. Kombinatorika – příklad 9 – řešení ... 77
Tabulka 7. Kombinatorika – příklad 11 – řešení ... 80
Tabulka 8. Pravděpodobnost – příklad 2 – zadání 1 ... 83
Tabulka 9. Pravděpodobnost – příklad 2 – zadání 2 ... 83
Tabulka 10. Statistika a práce s daty – příklad 2 – řešení ... 91
Tabulka 11. Statistika a práce s daty – příklad 4 – zadání ... 92
Tabulka 12. Statistika a práce s daty – příklad 4 – řešení ... 93
Tabulka 13. Statistika a práce s daty – příklad 6 – zadání ... 93
Tabulka 14. Statistika a práce s daty – příklad 7 – zadání ... 94
Tabulka 15. Statistika a práce s daty – příklad 7 – řešení ... 94
Tabulka 16. Statistika a práce s daty – příklad 8 – zadání ... 94
Tabulka 17. Statistika a práce s daty – příklad 9 – zadání ... 95
Tabulka 18. Statistika a práce s daty – příklad 10 – zadání ... 96
Tabulka 19. Statistika a práce s daty – příklad 11 – zadání ... 96
Tabulka 20. Statistika a práce s daty – příklad 11 – řešení ... 97

14.2 Seznam grafů

Graf 1. Funkce – příklad 7 – zadání ... 23
Graf 2. Funkce – příklad 14 – zadání ... 25
Graf 3. Funkce – příklad 15 – zadání ... 26
Graf 4. Funkce – příklad 27 – řešení ... 29
Graf 5. Funkce – příklad 28 – řešení ... 29
Graf 6. Funkce – příklad 29 – zadání ... 30
Graf 7. Funkce – příklad 30 – zadání ... 30
Graf 8. Funkce – příklad 31 – zadání ... 31

Graf 9. Funkce – příklad 32 – zadání ... 31
Graf 10. Funkce – příklad 33 – zadání ... 32
Graf 11. Funkce – příklad 33 – řešení ... 32
Graf 12. Funkce – příklad 34 – zadání ... 32
Graf 13. Funkce – příklad 34 – řešení ... 33
Graf 14. Analytická geometrie v rovině – příklad 12 – zadání ... 58
Graf 15. Analytická geometrie v rovině – příklad 12 – řešení ... 59
Graf 16. Analytická geometrie v rovině – příklad 13 – řešení I ... 60
Graf 17. Analytická geometrie v rovině – příklad 16 – řešení ... 62
Graf 18. Analytická geometrie v rovině – příklad 17a – řešení ... 62
Graf 19. Analytická geometrie v rovině – příklad 17b – řešení ... 63
Graf 20. Analytická geometrie v rovině – příklad 18b – řešení ... 63
Graf 21. Analytická geometrie v rovině – příklad 19a – řešení ... 64
Graf 22. Analytická geometrie v rovině – příklad 19b – řešení ... 64
Graf 23. Analytická geometrie v rovině – příklad 20a – řešení ... 65
Graf 24. Analytická geometrie v rovině – příklad 20b – řešení ... 65
Graf 25. Analytická geometrie v rovině – příklad 21 – zadání ... 66
Graf 26. Posloupnosti – příklad 6 – řešení ... 70
Graf 27. Posloupnosti – příklad 7 – řešení ... 70
Graf 28. Statistika a práce s daty – příklad 2 – řešení ... 92
Graf 29. Statistika a práce s daty – příklad 10 – řešení ... 96
Graf 30. Komplexní čísla – příklad 10 – řešení ... 100

14.3 Seznam obrázků

Obrázek 1. Algebra – příklad 21 – zadání ... 21
Obrázek 2. Funkce – příklad 13 – zadání ... 24
Obrázek 3. Rovnice a nerovnice – příklad 22 – zadání ... 39
Obrázek 4. Rovnice a nerovnice – příklad 22 – řešení ... 39
Obrázek 5. Planimetrie – příklad 10 – zadání ... 46
Obrázek 6. Planimetrie – příklad 11 – zadání ... 46
Obrázek 7. Planimetrie – příklad 12 – zadání ... 47
Obrázek 8. Planimetrie – příklad 12 – řešení ... 47
Obrázek 9. Planimetrie – příklad 14 – zadání ... 48
Obrázek 10. Planimetrie – příklad 15 – řešení ... 49

Obrázek 11. Stereometrie – příklad 7 – zadání ... 51
Obrázek 12. Stereometrie – příklad 8 – zadání ... 51
Obrázek 13. Stereometrie – příklad 9 – zadání ... 52
Obrázek 14. Stereometrie – příklad 9 – řešení ... 52
Obrázek 15. Stereometrie – příklad 12 – zadání ... 53
Obrázek 16. Analytická geometrie v rovině – příklad 2 – zadání ... 54
Obrázek 17. Analytická geometrie v rovině – příklad 3 – zadání ... 54
Obrázek 18. Analytická geometrie v rovině – příklad 7 – zadání ... 56
Obrázek 19. Analytická geometrie v rovině – příklad 9 – zadání ... 56
Obrázek 20. Analytická geometrie v rovině – příklad 10 – zadání ... 57
Obrázek 21. Analytická geometrie v rovině – příklad 11 – zadání ... 58
Obrázek 22. Analytická geometrie v rovině – příklad 15 – zadání ... 61
Obrázek 23. Analytická geometrie v rovině – příklad 27 – zadání ... 68
Obrázek 24. Posloupnosti – příklad 11 – zadání ... 71
Obrázek 25. Kombinatorika – příklad 10 – zadání ... 78
Obrázek 26. Kombinatorika – příklad 10 – řešení ... 79
Obrázek 27. Komplexní čísla – příklad 11 – zadání ... 101
Obrázek 28. Komplexní čísla – příklad 11 – řešení ... 101

15 Použité zdroje

15.1 Tištěné dokumenty

[1] *ČSN 01 6910 (016910) Úprava písemností zpracovaných textovými editory*. Praha: ČNI, 2007, 48 stran.

[2] SVOBODA, Emanuel, Karel BARTUŠKA, Oldřich LEPIL a Miroslava ŠIROKÁ. *Přehled středoškolské fyziky*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-116-7.

[3] LEPIL, Oldřich, Václav HOUDEK a Alojz PECHO. *Fyzika pro 3. ročník gymnázií*. 2.vyd. Praha: SPN, 1990. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-042-4964-7.

[4] LEPIL, Oldřich, Miroslava ŠIROKÁ a Milan BEDNAŘÍK. *Fyzika: sbírka úloh pro střední školy : [učebnice pro gymnázia a střední odborné školy]. 2.* Praha: Prometheus, 2002. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-204-X.

[5] SCHALK, H-CH: *Mathematik für HTL1*. Wien Reniets Verlag, 1986. ISBN 3-9000648-0-X.

[6] KRIŽALKOVIČ, Karol, Anton CUNINKA a Ondrej ŠEDIVÝ. *500 riešených slovných úloh z matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1971. Polytechnická knižnica (Alfa).

[7] DOBROVOLNÝ, Bohumil. *Základní učebnice pro pracující v kovoprůmyslu: určeno pro přípravu a zvyšování kvalifikace dělníků a učebnice polytechnické výchovy*. 2., opravené vydání. Praha: SNTL, 1961. Řada strojírenské literatury.

[8] FRISCHHERZ, Adolf a Herbert PIEGLER. *Technologie zpracování kovů: příklady*. Praha: Wahlberg, 1993. ISBN 80-901-6572-9.

[9] KRIEGELSTEIN, Eduard a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*. 8. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. Pomocné knihy pro žáky (Státní pedagogické nakladatelství).

[10] NOVOTNÝ, Josef. *Strojírenská praxe v příkladech: sbírka úloh z matematiky pro odborná učiliště a učňovské školy : pro 1.-3.ročník odborných učilišť a učňovských škol*. Praha: SPN, 1969. Učebnice odborných učilišť a učňovských škol.

[11] MELUZIN, Hubert, Andrej HREBÍK a Jaroslav DVOŘÁČEK. *Elektrotechnická praxe v příkladech: pomocná kniha pro učební a studijní obory SOU*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986.

[12] NĚMEC, Josef. *Svařování elektrickým obloukem: Učební text pro 1. ročník odborných učilišť a odborných škol-kovoodbory*. 5. přeprac. vyd. Praha: SNTL, 1969. Kurs technických znalostí.

[13] JIRÁSEK, František, Braniš KAREL, Horák STANISLAV a Vacek MILAN. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU,* 1. část. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986. ISBN 55-00-45/I/l.

[14] BARTÁK, Jaroslav a Jiří KEPKA. *Matematika III pro učební obory středních odborných učilišť*. 3. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-04-25647-3.

[15] LSTIBŮREK, František. *Příklady z automatizační techniky: pomocná kniha pro studijní obory na SPŠ elektrotechnických, spojové techniky a studijní obor ostatních SPŠ*. 3. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1978. Řada elektrotechnické literatury.

[16] BLAHOVEC, Antonín a Věra STAŇKOVÁ. *Sbírka příkladů a úloh ze základů elektrotechniky: učební text pro střední průmyslové školy, všechny studijní obory a zaměření skupiny 26 Elektrotechnika a pro studijní obory 37-41-6 Zabezpečovací a sdělovací technika v železniční dopravě, ...* Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980.

[17] SCHMIDTMAYER, Josef, Zdeněk ROZENSKÝ a Břetislav ŠIKOLA. *Matematika pro 4. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979. Učebnice pro střední školy.

[18] VENCÁLEK, František, František NAVARA a Karel VICOVSKÝ. *Matematika pro 3. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*. 5. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978. Učebnice odborných a středních odborných škol.

[19] NIMRICHTER, František a kol. *Matematika pro 3. a 4. ročník středních ekonomických škol*. 5. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. Učebnice pro střední školy (Státní pedagogické nakladatelství).

[20] KRIEGELSTEIN, Eduard a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*, 2. vyd. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1969,

[21] KRIEGELSTEIN, Eduard. *Sbírka úloh 1 z matematiky pro 1. ročník studijních oborů středních odborných učilišť a středních odborných škol*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1981. Učebnice pro střední školy.

[22] CALDA, Emil, Oldřich PETRÁNEK a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 6. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6041-1.

15.2 Elektronické dokumenty

[23] Generátor citací. *Citace.com* [online]. 2012, [cit. 2013-01-02]. Dostupné z: http://generator.citace.com/

[24] *Sbírka řešených úloh: Fyzika* [online]. 4. 8. 2016 [cit. 2018-11-24]. Dostupné z: http://reseneulohy.cz/92/odpor-vodice-v-zavislosti-na-teplote

[25] *Matematika pro všechny: web informací a studijních podkladů pro žáky, učitele a rodiče* [online]. [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~math4all/

[26] Magion. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 4. 10. 2018 [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Magion

[27] Měrný útlum. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-, 5. 6. 2013 [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/m%c4%9brn%c3%bd_%c3%batlum

[28] BARTOŠEK, Miroslav, František PROCHÁZKA, Miroslav STANĚK, Josef BOBEK A Zuzana BOBKOVÁ: *Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední*

školy, pro technické obory se strojírenským základem. Praha, NÚV 2018. [cit. 2019-03-31]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/3427/

Sbírka řešených úloh z aplikované matematiky pro střední školy pro technické obory s elektrotechnickým základem
Autorský kolektiv: Miroslav Bartošek, Josef Bobek, Zuzana Bobková, František Procházka, Miroslav Staněk

Vydal Národní ústav pro vzdělávání, školské poradenské zařízení a zařízení pro další vzdělávání pedagogických pracovníků, Weilova 1271/6, Praha 10 – Hostivař, PSČ 102 00.

Rok vydání: 2019
První vydání

ISBN: 978-80-7481-237-8

Národní ústav pro vzdělávání